Финитарная база формальных систем и строгое построение исчисления высказываний с его моделями

Н. И. Казимиров

Заметка по основаниям математической логики

Аннотация

Исчисление высказываний рассматривается как формальная система, которая замещает обыденное рассуждение в функциях, нужных математическому доказательству, и моделью обыденного рассуждения не является. В учебном изложении начальный этап построения формальных языков содержит видимость круга: правила образования формул записываются с помощью метапеременных, область значений которых (все формулы) определяется этими же правилами. Определение формулы через конечные кортежи слов или как наименьшей неподвижной точки оператора в $\mathcal{P}(\mathfrak{S}^*)$ устраняет эту видимость ценой обращения к арифметике и теории множеств, которые формулируются средствами ещё не построенной логики. В заметке формулируется финитарная точка старта в духе Д. Гильберта, Э. Поста, У. Куайна и А. А. Маркова, достаточная для развёртывания синтаксиса, подстановки, понятия теоремы и отношения выводимости исчисления высказываний без понятия множества и актуальной бесконечности. Указано, что понятие конечной итерации и вместе с ним содержательная арифметика в этой точке старта сохраняются. Во второй части рассматриваются функциональная модель и булевы алгебры как модели ИВ и доказывается полнота относительно класса булевых алгебр и относительно двухэлементной алгебры. Приводятся словарь перевода исчисления на язык алгебры, вычисления в булевом кольце с помощью полиномов Жегалкина, принцип двойственности, единственность двузначной модели и полнота по Посту.

Часть I. Синтаксис

1. Формальная система и обыденное рассуждение

В заметке строится исчисление высказываний (ИВ): в части I язык, аксиомы, правило вывода и выводимость, в части II его модели. Построению предшествуют два вопроса: в каком отношении эта система находится к обыденной логике (настоящий параграф) и с чего следует начинать построение, чтобы избежать круга (§ 2). Обозначения вводятся по мере надобности.

ИВ строится в §§ 3–5 как семейство предикатов на словах конечного алфавита. В определениях не участвуют понятия истины, смысла и следования; знак $\to$ является графическим знаком, и его чтение как «если …, то» в определения не входит. Поэтому утверждение о том, что ИВ моделирует логику обыденного рассуждения, из построения не следует. Теоремой оно быть не может: одна из сравниваемых сторон, обыденное рассуждение, формальным объектом не является.

© Nikolai Kazimirov 2026 | mathem.at

Отождествление ИВ с обыденной логикой опирается на три обстоятельства: чтение знаков $\neg, \wedge, \vee, \to$ как союзов «не», «и», «или», «если …, то»; согласие ИВ с практикой математических доказательств; теорему о полноте. Первое есть соглашение о произношении. Сопоставление с обыденной речью обнаруживает следующие расхождения. Каждая из приведённых формул является теоремой ИВ в смысле § 4; буквы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ обозначают произвольные формулы.

1. **Импликация без связи посылки и заключения.** Теоремой является $(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \vee (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$. При указанном чтении она утверждает, что из любых двух высказываний одно влечёт другое, тогда как обыденное «если» предполагает связь посылки с заключением (парадоксы материальной импликации, К. И. Льюис, 1918; спор о критерии истинности условного высказывания восходит к Филону и Диодору). Теорема $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, напротив, с обыденной логикой согласуется.

2. **Порядок и причина в конъюнкции.** Теоремой является $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to (\mathcal{B} \wedge \mathcal{A})$. Высказывания «приняли лекарство и выздоровели» и «выздоровели и приняли лекарство» сообщают разное (П. Стросон, 1952; Г. П. Грайс относит это различие к импликатурам и исключает его из условий истинности).

3. **Двузначность.** Формула $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ является аксиомой. Высказывания с нечётким предикатом («куча из ста зёрен велика»), высказывания о случайных будущих событиях (Аристотель, «Об истолковании», гл. 9) и высказывания с неудавшейся пресуппозицией («нынешний король Франции лыс»; Б. Рассел, 1905, П. Стросон, 1950) под эту схему очевидным образом не подпадают. Применительно к математическим утверждениям закон оспаривается интуиционистами (Л. Э. Я. Брауэр).

4. **Вывод и рассуждение.** Выводимость монотонна (предложение 5.4): добавление гипотезы не отменяет выводимой формулы. Правовое рассуждение монотонности не подчиняется: более поздний закон частично отменяет более ранний, причём ранний закон не признаётся ложным с самого начала, а посылки упорядочены шкалой приоритетов. Правило *modus ponens* также не предписывает принять заключение: принявший $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и обнаруживший ложность $\mathcal{B}$ отказывается от одной из посылок (Г. Харман, 1986). Выводимость есть отношение между формулами; рассуждение есть пересмотр убеждений.

Математическая практика. В математических доказательствах расхождения 1–2 существенной роли не играют. Математические утверждения не зависят от времени и контекста, а основная форма условного утверждения является общей: «для всякого целого числа: если оно делится на 4, то оно чётно». Такое утверждение опровергается только контрпримером, в котором посылка верна, а заключение ложно. Числа 8 (обе части верны), 2 (посылка ложна, заключение верно) и 3 (обе части ложны) контрпримерами не являются. Если условное высказывание трактуется как функция истинностных значений, это требование определяет таблицу импликации, называемой *материальной*: она ложна только при истинной посылке и ложном заключении. Для записи доказательств в арифметике создавалось и исчисление Г. Фреге (1879), который сравнивал отношение своей записи к обыденному языку с отношением микроскопа к глазу.

Экспликация. Соотношение ИВ с обыденной логикой описывается понятием *экспликации* (Р. Карнап, 1950): неточное понятие (экспликандум) заменяется точным (экспликатом), который оценивается по сходству с экспликандумом, точности, плодотворности и простоте. Совпадения употреблений не требуется: биологическое понятие *Piscis* заменяет обиходное «рыба» и не охватывает кита. У. Куайн (1960, § 53) описывает экспликацию как

устранение: выделяются функции неясного выражения, ради которых оно употребляется, для этих функций вводится замена, а синонимия не утверждается. Образцом служит упорядоченная пара в форме Куратовского: равенство $\langle X, Y\rangle = \{\{X\}, \{X, Y\}\}$ не выражает того, что подразумевалось под парой, и обеспечивает единственное требуемое свойство: $\langle X, Y\rangle = \langle U, V\rangle$ тогда и только тогда, когда $X = U$ и $Y = V$.

В этом смысле ИВ является заменой обыденной логики и её моделью не является. Материальная импликация выполняет те функции условного высказывания, которые нужны в доказательствах: отделение заключения и запись общих утверждений. Другие функции союза «если» она не выполняет. Различие между моделью и заменой проявляется при расхождении: модель исправляется, когда расходится с моделируемым явлением, а при расхождении ИВ с обыденным суждением исправляется суждение. Импликация с ложной посылкой принимается истинной вопреки обыденному суждению, и критерием правильности математического рассуждения становится выводимость. Таким образом, ИВ обслуживает математику, включая информатику; для других областей знания такого обоснования у него нет, и переносить его туда не следует. Выбор замены не единствен: интуиционистская логика, релевантные логики и логики условных высказываний сохраняют иные функции обыденных союзов и оцениваются по тем же критериям.

Теорема о полноте. Теорема о полноте (§ 9) связывает два формальных предиката: выводимость и истинность по таблицам. Таблица импликации сама входит в замену, поэтому теорема о соотношении с обыденной логикой ничего не сообщает. Аргумент сжатия Г. Крайзеля (1967, для логики первого порядка; схема та же) выводит из полноты совпадение интуитивной общезначимости с обоими формальными понятиями при двух условиях: всё выводимое интуитивно общезначимо, и всё интуитивно общезначимое истинно по таблицам. Первое условие требует признания общезначимыми формул вида $\neg\mathcal{A} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$. Оно выполнено для понятия правильности, принятого в математической практике, и не выполнено для обыденного употребления союза «если». Аргумент относится к уже отрегулированному понятию.

Замена не устраняет обыденную логику полностью. Определения ИВ формулируются на содержательном метаязыке, который сам пользуется союзами «если», «и», «не» (пункт **Б4** соглашения 2.1). Соотношение объектного языка и метаязыка составляет предмет следующего параграфа.

2. Проблема порочного круга и выбор точки старта

Построение формальной логики без предварительных соглашений наталкивается на препятствие, описанное в диалоге Л. Кэрролла «Что Черепаха сказала Ахиллу» (1895) и в статье У. Куайна *Truth by Convention* (1936). Правила чтения и преобразования символов объектного языка формулируются на некотором метаязыке. Полная формализация метаязыка требует мета-метаязыка, что даёт бесконечный регресс; обоснование базовой логики средствами самой этой логики есть порочный круг (*petitio principii*).

В учебном изложении это препятствие обходится двумя способами, каждый из которых вызывает возражения с точки зрения оснований:

1) **Теоретико-множественное определение.** Формула определяется как элемент пересечения всех индуктивных подмножеств свободного моноида $\mathfrak{S}^*$ над алфавитом $\mathfrak{S}$ (конструкция, восходящая к Фреге и Дедекинду, с квантором по $\mathcal{P}(\mathfrak{S}^*)$) либо как последняя компонента конечного кортежа сборки $\langle \xi_1, \ldots, \xi_N\rangle \in (\mathfrak{S}^*)^N$. Такое определение предполагает известными аксиоматическую теорию множеств (с аксиомами бесконечности и степени) или арифметику натурального ряда $\mathbb{N}$, которые сами формулируются

средствами логики предикатов и ИВ. Формального противоречия здесь нет, поскольку определяемая система и метатеория различны; возражение относится к порядку обоснования.

2) **Смешение определения и употребления.** Формулировка «пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — произвольные формулы; тогда $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ — формула» совмещает *определение* предиката «быть формулой» с *употреблением* уже определённого предиката. Возникает видимость, будто метапеременные $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ пробегают область значений, которая к моменту записи правила ещё не задана.

Разрыв круга достигается явной фиксацией точки старта. В соответствии с программой финитизма Д. Гильберта и П. Бернайса, каноническими исчислениями Э. Поста, теорией алгорифмов А. А. Маркова и изложением С. К. Клини предъявляется запас первичных понятий метатеории, принимаемых без формального определения. В этот запас не входят понятие множества, актуальная бесконечность и формальная теория арифметики. Выбор точки старта не единствен; критерием служит простота исходных понятий (см. замечание 2.1).

Мета-соглашение 2.1 (Первичная финитарная база метатеории)**.** Без определения принимаются следующие понятия и умения содержательного метаязыка (русского языка с техническими обозначениями).

Б1. Знаки. Распознавание конечного списка конкретных графических знаков, их различение и отождествление различных вхождений одного знака.

Б2. Слова и приписывание. Слово — конечная линейная цепочка знаков, записанная слева направо. Операции: *приписывание* второго слова вплотную справа к первому и проверка посимвольного совпадения двух слов (обозначение: ≡).

Б3. Предикаты. Предикаты Atom, Form, Ax, Thm на словах языка обозначают определённые свойства слов, зависящие от их состава. Запись $\mathrm{Form}(\xi)$ читается: «слово ξ есть формула».

Б4. Логика метаязыка. На метауровне используется обычная общечеловеческая логика в максимально простых и однозначных формулировках.

Б5. Рекурсивное построение классов слов. Сначала задаётся база: из всех слов выделяются определённые слова, относящиеся к классу. Затем задаются правила порождения новых слов из уже известных слов класса; класс должен быть замкнут относительно этих правил. Наконец, объявляется, что других слов в классе нет. Цепочка применений правил, начинающаяся с базы и оканчивающаяся данным словом, называется *построением* этого слова. Для класса теорем построение называется *выводом*.

Б6. Метапеременные. Буквы метаязыка, обозначающие слова, называются метапеременными. Если утверждение записано с метапеременной $\mathcal{A}$, ограниченной формулами, то перед ним подразумевается условие «если $\mathcal{A}$ — формула, то». Так же для метапеременных, ограниченных другими классами.

***Замечание* 2.1** (Потенциальная бесконечность и арифметика)**.** Условие «других слов в классе нет» в **Б5** — единственное место базы, где локализована потенциальная бесконечность. Оно не требует существования «множества всех слов» как завершённого объекта и обосновывает метод **структурной индукции**: свойство, которым обладают слова базы и которое сохраняется правилами, есть у всех слов класса. Если посылки каждого правила короче заключения или относятся к ранее определённому классу, то та же рекурсия даёт алгоритм

распознавания: слово разбирается по правилам до базы. Для атомов и формул этот алгоритм работает за время, полиномиальное от длины слова. Для теорем условие нарушено: посылка $\mathcal{A}$ правила Modus Ponens не входит в заключение $\mathcal{B}$, и разрешимость класса теорем доказывается отдельно (замечание 4.4).

3. Алфавит, слова и синтаксические предикаты

Фиксируется объектный алфавит $\mathfrak{S}$, состоящий ровно из **восьми** знаков:

$$\quad |\quad \#\quad (\quad)\quad \neg\quad \wedge\quad \vee\quad \to$$

Словом в алфавите $\mathfrak{S}$ называется конечная цепочка его знаков; класс всех таких слов обозначается $\mathfrak{S}^*$ (звезда Клини). Греческие буквы ξ, η, ζ являются метапеременными по словам из $\mathfrak{S}^*$. Приписывание записывается подряд: $(\xi \to \eta)$ есть слово, составленное из скобки, слова ξ, знака $\to$, слова η и скобки. Скобки при предикатах принадлежат метаязыку и выделены синим; составное слово в аргументе предиката заключается в одинарные кавычки: $\mathrm{Form}('(\xi \to \eta)')$.

Пропозициональными переменными служат строки, составленные только из палочек и заключённые с двух сторон в решётки: $\#|\#$, $\#||\#$, $\#|||\#$ и т. д. Такая запись отвечает трём требованиям. Запас переменных должен быть потенциально бесконечным, поэтому конечного набора букв недостаточно. Этот запас должен задаваться простейшими правилами над конечным алфавитом, поэтому буквы с числовыми индексами, требующие цифр и понятия индекса, не используются. Замена переменной должна работать безошибочно, поэтому переменная не может быть подсловом другой переменной: слово $|||$ является подсловом слова $||||$, и при замене формула попала бы внутрь него, а атом $\#|||\#$ подсловом атома $\#||||\#$ не является. Буквы a, b, c встречаются далее только как метапеременные по атомам и в алфавит не входят.

Палочки наращиваются только в атомах, поэтому вводятся два предиката, Atom и Form; первый входит в определение второго только как посылка правила **F1**.

Определение 3.1 (Предикат «быть атомом»)**.** Предикат $\mathrm{Atom}(\xi)$ задаётся рекурсивно:

A1. *База:* $\mathrm{Atom}('\#|\#')$.

A2. *Правило:* если $\mathrm{Atom}('\#\xi\#')$, то $\mathrm{Atom}('\#\xi|\#')$.

A3. *Замыкание:* никакие другие слова свойством Atom не обладают.

Свойством Atom обладают слова $\#|\#$, $\#||\#$, $\#|||\#$ и т. д. Вместо таких сложных записей переменных можно мысленно представлять себе p_1, p_2, p_3 и т.д.

Определение 3.2 (Предикат «быть формулой»)**.** Предикат $\mathrm{Form}(\xi)$ задаётся рекурсивно:

F1. *База:* если $\mathrm{Atom}(\xi)$, то $\mathrm{Form}(\xi)$.

F2. *Правило для отрицания:* если $\mathrm{Form}(\xi)$, то $\mathrm{Form}('\neg\xi')$.

F3. *Правила для бинарных связок:* если $\mathrm{Form}(\xi)$ и $\mathrm{Form}(\eta)$, то

$$\mathrm{Form}('(\xi \wedge \eta)'),\qquad \mathrm{Form}('(\xi \vee \eta)'),\qquad \mathrm{Form}('(\xi \to \eta)').$$

F4. *Замыкание:* никакие другие слова свойством Form не обладают.

Импликация в правиле **F1** действует в одну сторону: всякий атом есть формула, а формула, содержащая связку или скобку, атомом не является.

Заглавные каллиграфические буквы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ обозначают формулы, строчные латинские a, b, c — атомы; это метапеременные, ограниченные в смысле **Б6** (рис. 1). Запись $\mathcal{A}(a)$ обозначает формулу $\mathcal{A}$ с выделенной пропозициональной переменной a; ни вхождение a в $\mathcal{A}$, ни отсутствие в $\mathcal{A}$ других переменных не требуются.

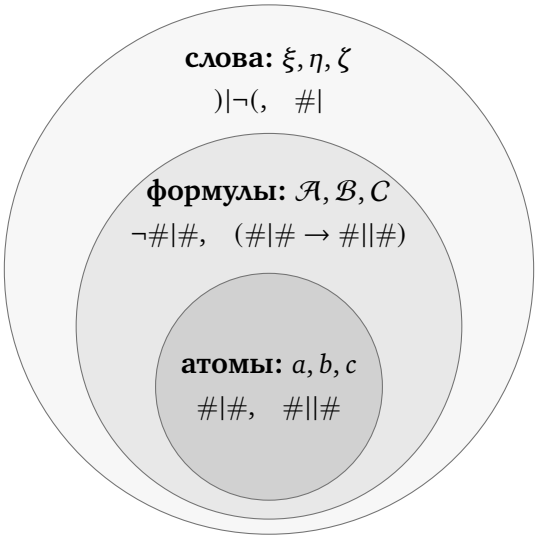


Рис. 1: Области значений метапеременных трёх родов, с примерами значений.

Сокращение скобок. Скобки сокращаются только в записи на метаязыке; само слово содержит их все. Внешние скобки опускаются: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ обозначает слово $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$. При вхождении в более длинную формулу они восстанавливаются: $\neg(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$, $\mathcal{C} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$. Отрицание скобок не вводит, поэтому $\neg\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ однозначно читается как $(\neg\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$. Употребительные дальнейшие соглашения (связки $\wedge, \vee$ связывают сильнее, чем $\to$; цепочка импликаций группируется вправо) в настоящем тексте не применяются.

Раскрытие условия. Раскрытие условия из **Б6** устраняет видимость круга. Формулировка «если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — формулы, то $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — формула» записывается как $\mathrm{Form}('\mathcal{A} \to \mathcal{B}')$ и означает

$$\text{для всяких слов } \xi, \eta: \quad \text{если } \mathrm{Form}(\xi) \text{ и } \mathrm{Form}(\eta), \text{ то } \mathrm{Form}('(\xi \to \eta)'),$$

то есть правило **F3** для импликации. В этой записи ξ, η пробегают слова, заданные независимо от понятия формулы, а предикат Form входит только в посылку и заключение правила. Совокупность формул заранее не предполагается. Сокращённая запись законна после определения 3.2; прочитанная как само определение, она и создаёт видимость круга.

Определение 3.3 (Подстановка). $\mathcal{A}[\mathcal{B}/a]$ есть слово, получаемое из $\mathcal{A}$ заменой всех вхождений атома a на формулу $\mathcal{B}$. Для формулы, записанной как $\mathcal{A}(a)$, пишется также $\mathcal{A}(\mathcal{B})$.

Предложение 3.4. *$\mathcal{A}[\mathcal{B}/a]$ есть формула. Подстановка перестановочна со связками:* $(\neg\mathcal{A})[\mathcal{B}/a] \equiv \neg\mathcal{A}[\mathcal{B}/a]$ *и* $(\mathcal{A} \circ \mathcal{C})[\mathcal{B}/a] \equiv \mathcal{A}[\mathcal{B}/a] \circ \mathcal{C}[\mathcal{B}/a]$, *где* $\circ$ *— один из знаков* $\wedge, \vee, \to$.

Доказательство. Атомы формулы разделены скобками и связками, поэтому вхождение атома a в формулу совпадает с одним из её атомов и не пересекает ни скобок, ни связок. Отсюда следует перестановочность. Структурная индукция по $\mathcal{A}$: для атома результат есть $\mathcal{B}$ или сам атом; для составной формулы применяются перестановочность, предположение индукции и правила **F2**, **F3**. □

Анализ слов. Слова и формулы анализируются средствами рекурсивной арифметики (Т. Скулем, 1923): подсчитываются скобки, скобочный баланс и длина слова, применяется индукция по длине слова. Такое употребление арифметики есть содержательное, в смысле замечания 2.1.

Лемма 3.5 (Скобочный баланс и начальные отрезки)**.**

(a) *В формуле открывающих и закрывающих скобок поровну; в каждом её начальном отрезке открывающих не меньше, чем закрывающих; в каждом непустом собственном начальном отрезке формулы, начинающейся со скобки, открывающих строго больше.*

(b) *Собственный начальный отрезок формулы формулой не является.*

Доказательство. (a) Структурная индукция.

(b) Структурная индукция по формуле C; пусть $\mathcal{A}$ — формула и собственный начальный отрезок C. Если C — атом, то $\mathcal{A}$ начинается с решётки и потому является атомом, но в $\mathcal{A}$ меньше двух решёток. Если $C \equiv \neg C_1$, то $\mathcal{A}$ начинается со знака $\neg$; единственное правило, дающее такие формулы, есть **F2**, поэтому $\mathcal{A} \equiv \neg\mathcal{A}_1$, где формула $\mathcal{A}_1$ — собственный начальный отрезок C_1, что противоречит предположению индукции. Если C начинается со скобки, то по (a) в $\mathcal{A}$ открывающих скобок строго больше, чем закрывающих, что противоречит (a) для формулы $\mathcal{A}$. □

Предложение 3.6 (Однозначность разбора)**.** *Всякая формула $\mathcal{A}$ имеет ровно один из следующих видов: атом; $\neg\mathcal{A}_1$; $(\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_2)$, где $\circ$ — один из знаков $\wedge, \vee, \to$. При этом формулы $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ и знак $\circ$ определены однозначно.*

Доказательство. Вид формулы определяется её первым знаком: решёткой, $\neg$ или открывающей скобкой. В случае отрицания единственность $\mathcal{A}_1$ очевидна. Пусть $(\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_2) \equiv (\mathcal{B}_1 \bullet \mathcal{B}_2)$. Если $\mathcal{A}_1 \not\equiv \mathcal{B}_1$, то одна из этих формул есть собственный начальный отрезок другой, что противоречит лемме 3.5 (b). Следовательно, $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{B}_1$, откуда $\circ \equiv \bullet$ и $\mathcal{A}_2 \equiv \mathcal{B}_2$. □

4. Аксиомы и теоремы исчисления

Предикат «быть теоремой ИВ» определяется чисто синтаксически: фиксируются аксиомы и замыкание относительно правила вывода. От него отличается понятие *тавтологии*: тавтологией называется формула, истинная по таблицам при всех распределениях значений на входящих в неё атомах (определение 7.2). Совпадение этих двух предикатов есть содержание теорем о корректности и о полноте (Э. Пост, 1921; вывод по таблице истинности строится в доказательстве Л. Кальмара, 1935), а не определение.

Аксиомы задаются схемами.

Определение 4.1 (Предикат «быть аксиомой»)**.** Выражения следующего списка содержат метапеременные и словами языка ИВ не являются. Аксиомой называется всякая их реализация, то есть слово, получаемое заменой метапеременных $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ конкретными формулами. Никакие другие слова аксиомами не являются.

- *утверждение консеквента:* $\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$;

- *аксиома Фреге:* $(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))$;
- *удаление конъюнкции:* $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to \mathcal{A}$, $\quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to \mathcal{B}$;
- *введение конъюнкции:* $\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$;
- *введение дизъюнкции:* $\mathcal{A} \to (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $\quad \mathcal{B} \to (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$;
- *конструктивная дилемма:* $(\mathcal{A} \to \mathcal{C}) \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \to \mathcal{C}))$;
- *закон Дунса Скота:* $\neg\mathcal{A} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$;
- *введение отрицания:* $(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to ((\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B}) \to \neg\mathcal{A})$;
- *закон исключённого третьего:* $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$.

Каждая реализация получается подстановкой формул вместо атомов в конкретную формулу и по предложению 3.4 является формулой.

Определение 4.2 (Предикат «быть теоремой ИВ»)**.** Предикат Thm задаётся рекурсивно:

T1. *База:* если $\mathrm{Ax}(\mathcal{A})$, то $\mathrm{Thm}(\mathcal{A})$.

T2. *Правило Modus Ponens:* если $\mathrm{Thm}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{Thm}('\mathcal{A} \to \mathcal{B}')$, то $\mathrm{Thm}(\mathcal{B})$.

T3. *Замыкание:* никакие другие слова свойством Thm не обладают.

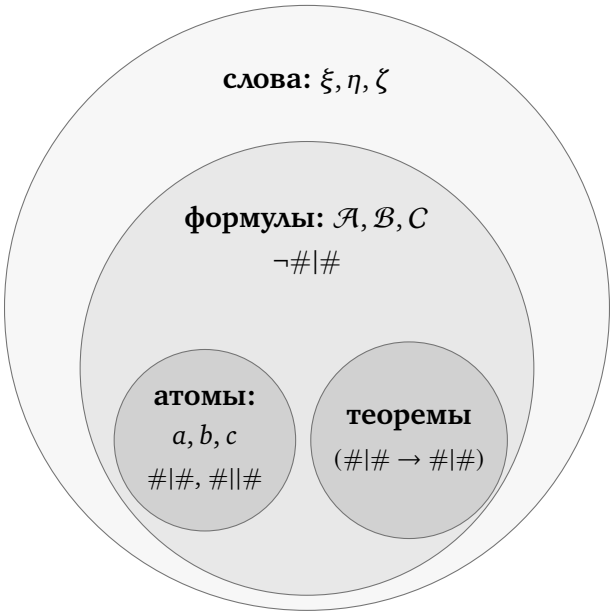


Рис. 2: Теоремы как отдельный класс формул. Атомы теоремами не являются (§ 7).

***Замечание* 4.3** (Конечный список аксиом)**.** Тот же класс теорем получается из 11 конкретных формул, в которых вместо $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ стоят атомы $\#|\#, \#||\#, \#|||\#$, при добавлении правила «если $\mathcal{A}$ — теорема, то $\mathcal{A}[\mathcal{B}/a]$ — теорема». Подстановка в аксиому схемы даёт аксиому той же схемы; обратно, произвольная аксиома схемы получается последовательными подстановками через промежуточные атомы, более длинные, чем все атомы, входящие в $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. Без промежуточных атомов подстановка вместо атома $\#||\#$ затронула бы его вхождения в уже подставленную формулу $\mathcal{A}$.

***Замечание* 4.4** (Разрешимость)**.** Классы атомов, формул и теорем ИВ разрешимы: для любого слова ξ за конечное число шагов устанавливается как выполнение, так и невыполнение каждого из предикатов $\mathrm{Atom}(\xi)$, $\mathrm{Form}(\xi)$, $\mathrm{Thm}(\xi)$. Для атомов и формул алгоритмом служит разбор по предложению 3.6; он полиномиален по длине слова. Для теорем также существует метод конечного поиска доказательства, опирающийся на функциональную модель исчисления высказываний.

5. Выводимость в контексте списка гипотез

В теоретико-множественном изложении отношение выводимости связывает произвольное, возможно бесконечное, множество формул и одну формулу. В финитарной метатеории понятия множества нет, и гипотезы записываются конечным списком формул. Однако чтобы сформировать список формул, требуется ввести в алфавит какой-то свежий символ — разделитель формул в списке, чтобы уметь этот список однозначно разбирать на формулы. Поэтому мы добавим в алфавит запятую в качестве нового символа и обозначим новый расширенный алфавит за $\mathfrak{S}'$.

Поскольку расширенный алфавит содержит в себе исходный, то предикаты Atom, Form, Thm над новым алфавитом будут задавать ровно те же самые классы слов, и смысл переменных $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ и $a, b, \ldots$ остаётся тем же. Запятая позволяет определить новый вид слова: список формул. Поскольку ранее мы закрепили за строчными греческими буквами только слова в исходном алфавите, для слов нового алфавита будем использовать прописные греческие буквы: Γ, Δ. В их область действия автоматически попадают и слова старого алфавита.

Определение 5.1 (Список формул и вхождение в список)**.** Предикат $\mathrm{List}(\Gamma)$ и утверждение $\mathcal{A} \trianglelefteq \Gamma$ («формула $\mathcal{A}$ входит в список Γ») определяются совместной рекурсией:

L1. *Одноэлементный список:* $\mathrm{List}(\mathcal{B})$ и $\mathcal{B} \trianglelefteq \mathcal{B}$.

L2. *Присоединение формулы к списку:* если $\mathrm{List}(\Gamma)$, то $\mathrm{List}(\Gamma, \mathcal{B})$ и $\mathcal{B} \trianglelefteq \Gamma, \mathcal{B}$; если к тому же $\mathcal{A} \trianglelefteq \Gamma$, то $\mathcal{A} \trianglelefteq \Gamma, \mathcal{B}$.

L3. *Замыкание:* никакие другие слова списками не являются, и никакие другие пары из формулы и списка отношением $\trianglelefteq$ не связаны.

Формулы запятой не содержат, поэтому разбиение списка на составляющие его формулы однозначно.

Список гипотез фиксируется и называется *контекстом*. Вместо бинарного отношения между списками и формулами вводится предикат на формулах, зависящий от контекста как от параметра. Допускается и *пустой контекст*, то есть отсутствие гипотез. Пустой контекст словом не является: это случай, когда параметр не указан, поэтому обозначения для него не требуется. Далее буквы Γ, Δ обозначают контексты. При пустом Γ ни одна формула в него не входит, запись $\Gamma, \mathcal{A}$ означает список из одной формулы $\mathcal{A}$, а запись $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ принимает вид $\vdash \mathcal{A}$.

Определение 5.2 (Выводимость в контексте)**.** Пусть Γ — контекст. Предикат $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ («формула $\mathcal{A}$ выводима в контексте Γ») задаётся рекурсивно:

D1. *База аксиом:* если $\mathrm{Ax}(\mathcal{A})$, то $\Gamma \vdash \mathcal{A}$.

D2. *База гипотез:* если $\mathcal{A} \trianglelefteq \Gamma$, то $\Gamma \vdash \mathcal{A}$.

D3. *Правило Modus Ponens:* если $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ и $\Gamma \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, то $\Gamma \vdash \mathcal{B}$.

D4. *Замыкание:* никакие другие формулы в контексте Γ не выводимы.

В пустом контексте правило **D2** не применяется, поскольку ни одна формула в него не входит: выводимость $\vdash \mathcal{A}$ задаётся правилами **D1**, **D3**, **D4**.

Пример вывода. Вывод в контексте есть конечная цепочка формул, каждая из которых является аксиомой (**D1**), гипотезой (**D2**) или получена из двух предшествующих по правилу Modus Ponens (**D3**). Для любых атомов a, b выполнено $a, \neg a \vdash b$:

1.	$\neg a$	гипотеза
2.	$\neg a \to (a \to b)$	аксиома (закон Дунса Скота)
3.	$a \to b$	Modus Ponens: 1, 2
4.	a	гипотеза
5.	b	Modus Ponens: 4, 3

Строки таблицы содержат метапеременные и словами языка ИВ не являются, поэтому приведён не один вывод, а схема вывода: каждая реализация метапеременных a, b конкретными атомами даёт отдельный вывод, и таких выводов бесконечно много.

Предложение 5.3.

(a) $\mathrm{Thm}(\mathcal{A})$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash \mathcal{A}$.

(b) *Замена посылки* $\mathrm{Ax}(\mathcal{A})$ *на* $\mathrm{Thm}(\mathcal{A})$ *в правиле **D1** даёт тот же предикат.*

Доказательство. (a) Правила **D1** и **D3** без контекста совпадают с правилами для Thm. (b) По (a) теорема имеет вывод в пустом контексте, в котором применяются только **D1** и **D3**; тот же вывод годится в контексте Γ. □

Предложение 5.4 (Монотонность по контексту)**.** *Если* $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ *и всякая формула, входящая в* Γ*, входит в контекст* Δ*, то* $\Delta \vdash \mathcal{A}$*. В частности,* $\Gamma, \mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$.

Доказательство. Индукция по выводу: правила **D1** и **D3** от контекста не зависят, а гипотеза из Γ есть гипотеза из Δ. □

Предложение 5.5 (Теорема о дедукции; Ж. Эрбран, 1930)**.** $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Доказательство. Обратное утверждение есть Modus Ponens. Для прямого применяется индукция по выводу $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$. При $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ используется теорема $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, выводимая двумя применениями Modus Ponens к реализациям аксиомы Фреге и утверждения консеквента. Если $\mathcal{B}$ — аксиома или гипотеза из Γ, то применяется утверждение консеквента. Шаг Modus Ponens обслуживается аксиомой Фреге. □

Через $\Gamma[\mathcal{B}/a]$ обозначается контекст, получаемый из Γ подстановкой в каждую его формулу.

Предложение 5.6 (Подстановка в выводе)**.** *Если* $\Gamma \vdash \mathcal{A}$*, то* $\Gamma[\mathcal{B}/a] \vdash \mathcal{A}[\mathcal{B}/a]$*. В частности, если атом* a *не входит в формулы контекста* Γ*, то* $\Gamma \vdash \mathcal{A}[\mathcal{B}/a]$*, а если* $\mathrm{Thm}(\mathcal{A})$*, то* $\mathrm{Thm}(\mathcal{A}[\mathcal{B}/a])$.

Доказательство. Индукция по выводу $\Gamma \vdash \mathcal{A}$. Подстановка в аксиому даёт аксиому той же схемы. Из $\mathcal{A} \trianglelefteq \Gamma$ следует $\mathcal{A}[\mathcal{B}/a] \trianglelefteq \Gamma[\mathcal{B}/a]$. Для правила Modus Ponens применяется перестановочность подстановки с импликацией (предложение 3.4). □

Ограничений на переменные формулы $\mathcal{B}$ предложение 5.6 не требует: подстановка выполняется за один проход, и подставленные вхождения повторно не просматриваются. Условие появляется лишь при нескольких последовательных подстановках, если результат должен совпасть с заданной формулой: следующая подстановка затрагивает и атомы, внесённые предыдущей.

Предложение 5.7 (Инвариантность относительно перестановки атомов)**.** *Пусть π — перестановка конечного числа атомов; остальные атомы остаются на месте. Через $\mathcal{A}^\pi$ обозначается формула, полученная из $\mathcal{A}$ заменой за один проход каждого атома a атомом $\pi(a)$, через Γ^π — контекст, полученный так же из Γ. Тогда $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\Gamma^\pi \vdash \mathcal{A}^\pi$. В частности, $\mathrm{Thm}(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Thm}(\mathcal{A}^\pi)$.*

Доказательство. Индукция по выводу $\Gamma \vdash \mathcal{A}$. Реализация схемы аксиом переходит в реализацию той же схемы, гипотеза из Γ — в гипотезу из Γ^π, а шаг Modus Ponens — в шаг Modus Ponens, поскольку $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})^\pi \equiv \mathcal{A}^\pi \to \mathcal{B}^\pi$. Обратное утверждение получается применением обратной перестановки. □

Взаимная однозначность существенна: формула $a \to a$ есть теорема и получается склейкой атомов из формулы $a \to b$, которая теоремой не является (§ 7).

Продолжение примера. Схема $a, \neg a \vdash b$ переносится с атомов на формулы. Для формул $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ выбирается атом b, не входящий в $\mathcal{A}$, и атом a, отличный от b. Подстановка $\mathcal{A}$ вместо a даёт $\mathcal{A}, \neg\mathcal{A} \vdash b$. Поскольку в $\mathcal{A}$ нет атома b, в этот контекст он не входит, и подстановка $\mathcal{B}$ вместо b даёт $\mathcal{A}, \neg\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$. В силу монотонности (предложение 5.4) из всякого контекста, содержащего формулу и её отрицание, выводима любая формула.

***Замечание* 5.8** (Подстановка только в заключение)**.** Подстановка в заключение без подстановки в контекст вывод не сохраняет: из $a \vdash a$ получалось бы $a \vdash a \wedge \neg a$, что неверно для любой переменной a по теореме о корректности (§ 7). Подстановка согласованная, $a \wedge \neg a \vdash a \wedge \neg a$, верна. Поэтому подстановка не может быть правилом вывода в определении 5.2: при таком правиле теорема о дедукции дала бы теорему $a \to (a \wedge \neg a)$.

***Замечание* 5.9** (Границы списочного определения)**.** Конечности списка достаточно для определения выводимости, поскольку вывод использует конечное число гипотез. Бесконечная совокупность гипотез допускается, если она задана предикатом H: правило **D2** заменяется правилом «если $H(\mathcal{A})$, то $\mathcal{A}$ выводима в контексте H». Утверждения о произвольных бесконечных совокупностях формул (теорема компактности, лемма Линденбаума в общей форме) в базе не формулируются и требуют теоретико-множественной метатеории. Финитарная база достаточна для построения исчисления и не покрывает всей его метатеории.

Часть II. Модели исчисления высказываний

6. Назначение моделей

Часть I определяет теоремы и выводимость как свойства слов. Выводимость формулы подтверждается предъявлением вывода, а её невыводимость из определения напрямую не усматривается: для этого нужно перебрать все возможные выводы (с учётом правила Modus Ponens возникает проблема поиска нужной посылки $\mathcal{A}$, отсутствующей в консеквенте). Модель решает эту проблему. Формулам сопоставляются элементы некоторой алгебры (означивание формул) так, что все выводимые формулы (теоремы) получают одно конкретное значение в этой алгебре; формулы с иными значениями не выводимы. Схема такого со-

поставления приведена на рис. 3: значения атомов задаются произвольно, значение всякой другой формулы определяется её строением, а все теоремы получают значение 1.

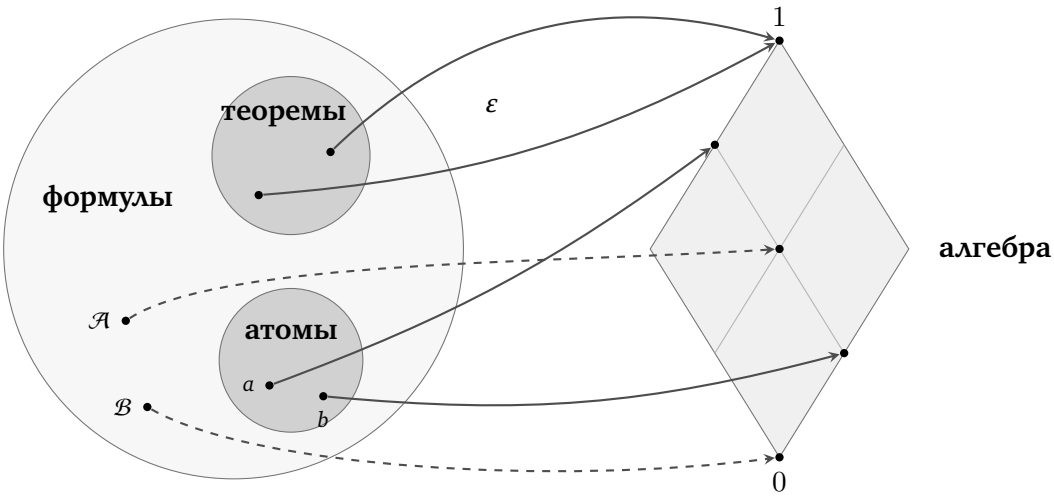


Рис. 3: Модель исчисления высказываний. Оценка ε сопоставляет формулам элементы алгебры: атомы отображаются в произвольно выбранные элементы, значения формул $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ вычисляются по значениям входящих в них атомов, все теоремы отображаются в 1.

Слово «модель» употребляется здесь в строгом математическом смысле, имея полностью противоположную коннотацию рассмотренному в § 1: там спрашивалось, моделирует ли ИВ внешнее явление, здесь математические структуры служат моделями ИВ. Истинностные таблицы являются частью той же замены и об обыденной логике ничего не сообщают.

Математическая модель может использоваться для интерпретации или обоснования того или иного явления или конструкции как за пределами математики, так и внутри неё самой. Модель исчисления высказываний — как раз второй случай: мы строим класс теоретико-множественных моделей некоторого формального исчисления. Целью такого моделирования является переложение чисто синтаксического исчисления на язык алгебры (или других разделов математики, например, топологии), чтобы, с одной стороны, воспользоваться более привычным набором понятий, а с другой стороны, получить доступ к инструментам развитого аппарата алгебраических структур (пример см. в § 10). В то же время построение модели (или, точнее, класса моделей) требует от неё в определённом смысле *точности*: при переводе с языка исчисления на язык алгебры мы должны воспроизвести все выводимые соотношения формул с точностью до их эквивалентности (корректность) и постараться не привнести новые (полнота).

Кроме того, этот перевод должен быть устроен таким образом, чтобы всякий результат о формулах можно было бы однозначно интерпретировать в моделях и, обратно, всякий *общий* для моделей данного класса алгебраический результат (уравнение) можно было бы однозначно (по модулю строго определённой эквивалентности формул) интерпретировать в исчислении. Именно поэтому два главных требования к классу моделей — корректность и полнота — являются определяющими при выборе класса моделей исчисления. Таких классов может быть несколько (или бесконечно много), такие классы могут содержать лишь одну-единственную модель или много (не обязательно изоморфных) моделей, способ их построения может быть каким угодно в рамках классической теории множеств, но корректность и полнота классов должны соблюдаться безусловно, если мы хотим иметь точное алгебраическое представление об исчислении.

Заметим, что именно класс моделей, а не одна конкретная модель решает задачи корректной и полной интерпретации, потому что каждая конкретная модель своего класса может обладать какими-то весьма конкретными алгебраическими теоремами, неверными для

всего класса в целом и неверными (после обратного перевода) в исчислении. Это и упрощает ситуацию с интерпретацией, и одновременно усложняет её. Упрощает — потому что набор общих для всего класса моделей теорем может быть значительно у́же теории одной конкретной модели; усложняет — потому что нам приходится описывать много моделей одновременно, не забывая про различные «крайние случаи».

В этой части метатеория свободно пользуется множествами, функциями и отношениями; финитарные ограничения части I сняты для удобства и полной математической свободы рассуждений. Обозначения метапеременных $\mathcal{A}, \mathcal{B}, C$ (для формул), a, b, c (начало латинского алфавита, для пропозициональных переменных), Γ, Δ (для контекстов), $\vdash$ (выводимость) сохраняют тот же смысл, что и раньше. Новое: договоримся, что часть латинского алфавита (несколько букв в конце), т.е. такие буквы, как x, y, z, мы резервируем для значений формул, т.е. элементов модели, греческую ε — для функции оценки, n, m, k — для натуральных чисел. Естественно, мы также не будем пренебрегать использованием индексов и акцентов для увеличения количества используемых переменных.

7. Функциональная модель

На множестве $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ заданы операции: $\neg x = 1 - x$, $x \wedge y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$, $x \to y = \max(1 - x, y)$. Таблица истинности этих операций:

x	y	$\neg x$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1

Определение 7.1 (Оценка)**.** Оценка ε сопоставляет каждому атому элемент 0 или 1 и продолжается на все формулы равенствами $\varepsilon(\neg\mathcal{A}) = \neg\varepsilon(\mathcal{A})$ и $\varepsilon(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = \varepsilon(\mathcal{A}) \circ \varepsilon(\mathcal{B})$. Корректность продолжения обеспечена однозначностью разбора (предложение 3.6).

Значение $\varepsilon(\mathcal{A})$ зависит только от значений ε на атомах, входящих в $\mathcal{A}$. Поэтому формула, все атомы которой содержатся среди $a_1, \ldots, a_n$, задаёт функцию $f_{\mathcal{A}} \colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$. Множество B_n всех таких функций с поточечными операциями называется **функциональной моделью** от n переменных; при этом $f_{\neg\mathcal{A}} = \neg f_{\mathcal{A}}$ и $f_{\mathcal{A}\circ\mathcal{B}} = f_{\mathcal{A}} \circ f_{\mathcal{B}}$, где $\circ$ в правой части понимается поточечно. В B_n ровно 2^{2^n} элементов.

Подстановка формулы в формулу соответствует смещению оценки: $\varepsilon(\mathcal{A}[\mathcal{B}/a]) = \varepsilon'(\mathcal{A})$, где оценка ε' совпадает с ε всюду, кроме $\varepsilon'(a) = \varepsilon(\mathcal{B})$. Это проверяется структурной индукцией по $\mathcal{A}$.

Определение 7.2 (Тавтология и семантическое следование)**.** Формула $\mathcal{A}$ есть **тавтология** (обозначается: $\models_{\mathbb{B}} \mathcal{A}$), если $\varepsilon(\mathcal{A}) = 1$ при всякой оценке ε, то есть $f_{\mathcal{A}}$ есть функция, тождественно равная 1.

Формула $\mathcal{A}$ логически (семантически) следует из контекста Γ ($\Gamma \models_{\mathbb{B}} \mathcal{A}$), если для любой оценки ε: если $\varepsilon(C) = 1$ при всех $C \trianglelefteq \Gamma$, то $\varepsilon(\mathcal{A}) = 1$ (то есть значение 1 переносится с формул контекста Γ на $\mathcal{A}$).

При пустом Γ посылка выполнена для всякой оценки, поэтому запись $\models_{\mathbb{B}} \mathcal{A}$ согласована с обозначением тавтологии.

Предложение 7.3 (Корректность)**.** *Если $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, то $\Gamma \models_{\mathbb{B}} \mathcal{A}$. В частности, всякая теорема есть тавтология (случай пустого контекста).*

Доказательство. Индукция по выводу. Все 11 схем аксиом дают тавтологии: это конечная проверка таблицами от трёх переменных, а по формуле для подстановки она распространяется на все реализации. Гипотезы получают значение 1 по условию. Если $\varepsilon(\mathcal{A}) = 1$ и $\varepsilon(\mathcal{A}) \to \varepsilon(\mathcal{B}) = 1$, то $\varepsilon(\mathcal{B}) = 1$. Для теоремы применяется предложение 5.3 (а): она выводима в пустом контексте. □

Отсюда атом не является теоремой (достаточно $\varepsilon(a) = 0$), $a \nvdash a \wedge \neg a$ и пара $\vdash \mathcal{A}$, $\vdash \neg\mathcal{A}$ невозможна (непротиворечивость ИВ).

Кортеж значений $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in \mathbb{B}^n$ сокращённо обозначается $\vec{x}$, так что $f(\vec{x})$ означает $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Определение 7.4 (Литерал и совершенная дизъюнктивная нормальная форма)**.** Для атома a и значения $s \in \mathbb{B}$ **литерал** a^s есть формула, определяемая условиями $a^1 \equiv a$ и $a^0 \equiv \neg a$. Для функции $f \in B_n$, не равной тождественно нулю, **совершенной дизъюнктивной нормальной формой** называется формула

$$\mathcal{D}_f \equiv \bigvee_{\substack{\vec{x}\in\mathbb{B}^n \\ f(\vec{x})=1}} \left(a_1^{x_1} \wedge \cdots \wedge a_n^{x_n}\right),$$

то есть дизъюнкция конъюнкций литералов по всем кортежам $\vec{x}$, на которых f равна 1. Это запись на метаязыке: кортежи берутся в лексикографическом порядке, скобки в конъюнкциях и дизъюнкциях расставляются влево, так что $C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$ обозначает $(C_1 \wedge C_2) \wedge C_3$.

Предложение 7.5 (Функциональная полнота)**.** *Всякая функция из B_n при $n \geqslant 1$ есть $f_{\mathcal{A}}$ для некоторой формулы $\mathcal{A}$ с атомами из $a_1, \ldots, a_n$.*

Доказательство. Для функции $f \in B_n$, не равной тождественно нулю, проверяется равенство $f_{\mathcal{D}_f} = f$. Пусть $\vec{y} \in \mathbb{B}^n$ и $\varepsilon(a_i) = y_i$ при всех i. По таблице истинности $\varepsilon(a^s) = 1$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon(a) = s$. Поэтому конъюнкция $a_1^{x_1} \wedge \cdots \wedge a_n^{x_n}$ получает значение 1 в точности при $\vec{y} = \vec{x}$, а формула $\mathcal{D}_f$ — в точности при $f(\vec{y}) = 1$. Тождественному нулю соответствует формула $a_1 \wedge \neg a_1$. □

Функциональная полнота означает выразимость всякой функции формулой и от логической полноты отличается. Утверждение, обратное предложению 7.3 (всё, что истинно в модели, выводимо), следует из общей конструкции для булевых алгебр и доказывается в теореме 9.3.

8. Булевы алгебры как модели

Булева алгебра есть дистрибутивная решётка $\langle B, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ с дополнением: $x \wedge \neg x = 0$, $x \vee \neg x = 1$. В ней полагается $x \to y = \neg x \vee y$, а $x \leqslant y$ означает $x \wedge y = x$. Примеры: $\mathbb{B}$; функциональная модель B_n; множество всех подмножеств множества X с теоретико-множественными операциями. Одноэлементная алгебра, в которой $0 = 1$, не исключается.

Оценка со значениями в булевой алгебре B задаётся и продолжается как в определении 7.1. Запись $\Gamma \models_{\mathsf{BA}} \mathcal{A}$ означает: в **каждой** булевой алгебре B всякая оценка ε, для которой $\varepsilon(C) = 1$ при всех $C \trianglelefteq \Gamma$, удовлетворяет $\varepsilon(\mathcal{A}) = 1$. Отношение $\models_{\mathbb{B}}$ есть частный случай с единственной моделью $\mathbb{B}$.

Лемма 8.1.

(а) *$x \to y = 1$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant y$.*

(b) *Булево тождество, верное в $\mathbb{B}$, верно во всякой булевой алгебре.*

Доказательство. (a) Если $x \leqslant y$, то $\neg x \vee y \geqslant \neg x \vee x = 1$. Если $\neg x \vee y = 1$, то $x = x \wedge (\neg x \vee y) = x \wedge y$. (b) Законы булевой алгебры приводят каждую часть тождества к совершенной дизъюнктивной нормальной форме, которая определяется таблицей значений в $\mathbb{B}$; формы обеих частей совпадают. □

Предложение 8.2 (Корректность относительно класса булевых алгебр)**.** *Если* $\Gamma \vdash \mathcal{A}$*, то* $\Gamma \models_{\mathsf{BA}} \mathcal{A}$.

Доказательство. Индукция по выводу. Аксиомы суть тавтологии, поэтому по лемме 8.1 (b) получают значение 1 во всякой булевой алгебре. Гипотезы получают значение 1 по условию. Если $\varepsilon(\mathcal{A}) = 1$ и $\varepsilon(\mathcal{A}) \to \varepsilon(\mathcal{B}) = 1$, то по лемме 8.1 (a) имеем $1 \leqslant \varepsilon(\mathcal{B})$. □

9. Полнота

9.1. Полнота относительно класса булевых алгебр

Модель, опровергающая невыводимую формулу, строится из самого синтаксиса. Фиксируется контекст Γ. Запись $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ означает $\Gamma \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$; формулы эквивалентны, $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, если $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$.

Лемма 9.1. *Выполнены следующие свойства; при их проверке применяется теорема о дедукции (предложение 5.5).*

(1) $\preceq$ *рефлексивно (теорема* $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$*) и транзитивно;*

(2) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ *есть точная нижняя грань* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *относительно* $\preceq$ *(удаление и введение конъюнкции);*

(3) $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ *есть точная верхняя грань (введение дизъюнкции и конструктивная дилемма);*

(4) $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee C) \preceq (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge C)$ *(конструктивная дилемма в контексте с гипотезой* $\mathcal{A}$*);*

(5) $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ *(закон Дунса Скота),* $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ *(закон исключённого третьего), а из* $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ *следует* $\neg\mathcal{B} \preceq \neg\mathcal{A}$ *(введение отрицания);*

(6) $(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \sim (\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ *(закон исключённого третьего для* $\mathcal{A}$*, конструктивная дилемма и закон Дунса Скота);*

(7) $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$ *для всякой формулы* $\mathcal{B}$.

В силу леммы $\sim$ есть конгруэнтность, а классы $[\mathcal{A}]$ с операциями $[\mathcal{A}] \wedge [\mathcal{B}] = [\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}]$, $[\mathcal{A}] \vee [\mathcal{B}] = [\mathcal{A} \vee \mathcal{B}]$, $\neg[\mathcal{A}] = [\neg\mathcal{A}]$ образуют булеву алгебру LT_Γ — **алгебру Линденбаума–Тарского** контекста Γ; при пустом контексте она обозначается LT. По пункту (7) её единица есть класс выводимых в контексте формул. По пункту (6) выполнено $[\mathcal{A} \to \mathcal{B}] = [\mathcal{A}] \to [\mathcal{B}]$.

Словарь перевода. Конструкция LT_Γ переводит исчисление на язык алгебры. Порядок булевой алгебры есть отношение $\preceq$: неравенство $[\mathcal{A}] \leqslant [\mathcal{B}]$ означает $\Gamma \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, то есть по теореме о дедукции $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$. Поэтому при контексте из одной формулы знак выводимости переводится в знак неравенства. Для алгебры LT перевод таков:

исчисление	алгебра LT
формула $\mathcal{A}$	элемент $[\mathcal{A}]$
связки $\neg, \wedge, \vee, \to$	операции $\neg, \wedge, \vee, \to$
эквивалентность $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$	равенство $[\mathcal{A}] = [\mathcal{B}]$
$\vdash \mathcal{A}$	$[\mathcal{A}] = 1$
$\vdash \neg\mathcal{A}$	$[\mathcal{A}] = 0$
$\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$	$[\mathcal{A}] \leqslant [\mathcal{B}]$
$C_1, \ldots, C_k \vdash \mathcal{B}$	$[C_1] \wedge \cdots \wedge [C_k] \leqslant [\mathcal{B}]$
$C, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ равносильно $C \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$z \wedge x \leqslant y$ равносильно $z \leqslant x \to y$
правило Modus Ponens	$x \wedge (x \to y) \leqslant y$
оценка ε	гомоморфизм $\mathsf{LT} \to \mathbb{B}$
перестановка атомов π	автоморфизм $[\mathcal{A}] \mapsto [\mathcal{A}^\pi]$

Теорема 9.2 (Полнота относительно класса булевых алгебр)**.** $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \models_{\mathsf{BA}} \mathcal{A}$.

Доказательство. Прямое утверждение есть предложение 8.2. Пусть $\Gamma \nvdash \mathcal{A}$. Канонической оценкой $\varepsilon(a) = [a]$ в LT_Γ структурной индукцией получается $\varepsilon(\mathcal{B}) = [\mathcal{B}]$ для всех формул $\mathcal{B}$. При $C \trianglelefteq \Gamma$ имеем $\Gamma \vdash C$, поэтому $\varepsilon(C) = 1$, тогда как $\varepsilon(\mathcal{A}) = [\mathcal{A}] \neq 1$. □

9.2. Сведение к одной модели

Теорема 9.3 (Э. Пост, 1921)**.** $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \models_{\mathbb{B}} \mathcal{A}$. *В частности,* $\mathrm{Thm}(\mathcal{A})$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{A}$ *есть тавтология.*

Доказательство. Прямое утверждение есть предложение 7.3. Пусть $\Gamma \nvdash \mathcal{A}$. По лемме 9.1 (7) имеем $[\mathcal{A}] \neq 1$, поэтому $\neg[\mathcal{A}] \neq 0$, и существует ультрафильтр U алгебры LT_Γ, содержащий $\neg[\mathcal{A}]$.[1] Отображение $h\colon \mathsf{LT}_\Gamma \to \mathbb{B}$, где $h(y) = 1$ при $y \in U$ и $h(y) = 0$ иначе, есть гомоморфизм. Действительно, по определению ультрафильтра $\neg y \in U$ тогда и только тогда, когда $y \notin U$, и $y \wedge z \in U$ тогда и только тогда, когда $y \in U$ и $z \in U$; для дизъюнкции и импликации равенства следуют из этих двух, поскольку $y \vee z = \neg(\neg y \wedge \neg z)$ и $y \to z = \neg y \vee z$. Оценка с $\varepsilon(a) = h([a])$ для всех атомов a даёт структурной индукцией $\varepsilon(\mathcal{B}) = h([\mathcal{B}])$ для всех формул $\mathcal{B}$. При $C \trianglelefteq \Gamma$ имеем $[C] = 1 \in U$, откуда $\varepsilon(C) = 1$, а из $\neg[\mathcal{A}] \in U$ следует $\varepsilon(\mathcal{A}) = 0$. Следовательно, $\Gamma \not\models_{\mathbb{B}} \mathcal{A}$. □

Следствие 9.4. *Формулы* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *с атомами из* $a_1, \ldots, a_n$ *эквивалентны в пустом контексте тогда и только тогда, когда* $f_\mathcal{A} = f_\mathcal{B}$. *Отображение* $[\mathcal{A}] \mapsto f_\mathcal{A}$ *есть изоморфизм подалгебры* LT*, порождённой классами* $[a_1], \ldots, [a_n]$*, на функциональную модель* B_n.

Доказательство. $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ означает $\vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $\vdash \mathcal{B} \to \mathcal{A}$; по теореме 9.3 это равносильно $f_\mathcal{A} = f_\mathcal{B}$. Отсюда корректность и инъективность отображения. Сюръективность есть предложение 7.5. □

[1] *Ультрафильтром* булевой алгебры B называется множество $U \subseteq B$, для которого: $1 \in U$; из $y, z \in U$ следует $y \wedge z \in U$; из $y \in U$ и $y \leqslant z$ следует $z \in U$; при всяком $y \in B$ в U входит ровно один из элементов y и $\neg y$. В счётной булевой алгебре всякий ненулевой элемент z_0 входит в некоторый ультрафильтр $U(z_0)$, и для его построения достаточно перечисления $y_1, y_2, \ldots$ элементов алгебры (алгебраическая форма леммы Линденбаума). Полагается $z_k = z_{k-1} \wedge y_k$, если этот элемент отличен от нуля, и $z_k = z_{k-1} \wedge \neg y_k$ иначе; в обоих случаях $z_k \neq 0$, поскольку $z_{k-1} = (z_{k-1} \wedge y_k) \vee (z_{k-1} \wedge \neg y_k)$. Искомый ультрафильтр есть $U(z_0) = \{y : z_k \leqslant y \text{ при некотором } k\}$. Условие на $\wedge$ следует из убывания цепочки z_k; при всяком k в $U(z_0)$ входит y_k или $\neg y_k$, а оба сразу войти не могут, поскольку иначе некоторое $z_m \leqslant y_k \wedge \neg y_k = 0$. Алгебра LT_Γ счётна, и её перечисление задаётся перечислением формул как слов конечного алфавита. Ультрафильтры $U(z)$, $z \neq 0$, различают элементы счётной алгебры B: при $y \neq w$ и $z = (y \wedge \neg w) \vee (\neg y \wedge w)$ в $U(z)$ входит ровно один из элементов y, w. Поэтому отображение $y \mapsto \{z \in B \setminus \{0\} : y \in U(z)\}$ есть вложение B в $\mathcal{P}(B \setminus \{0\})$; это частный случай теоремы о представлении булевых алгебр (М. Стоун, 1936).

***Замечание* 9.5** (Класс моделей и единственная модель)**.** Теорема 9.2 получена прямой конструкцией: модель LT_Γ построена из самой выводимости. Содержательный шаг составляет теорема 9.3: для ИВ достаточно одной конечной модели.

10. Вычисления в модели: полиномы Жегалкина

Перевод на язык алгебры даёт не только проверку выводимости перебором строк таблицы истинности, но и вычисления по правилам арифметики. Для этого булева алгебра перестраивается в кольцо.

В булевой алгебре полагается $xy = x \wedge y$ и $x + y = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$. На $\mathbb{B}$ это умножение и сложение по модулю 2. Поэтому в $\mathbb{B}$ выполнены законы коммутативного кольца с единицей, тождества $x^2 = x$ и $x + x = 0$, а также равенства

$$\neg x = 1 + x, \qquad x \vee y = x + y + xy, \qquad x \to y = 1 + x + xy.$$

По лемме 8.1 (b) всё это верно во всякой булевой алгебре: она есть коммутативное кольцо с единицей, в котором $x^2 = x$ (*булево кольцо*; М. Стоун, 1936), а связки выражаются через кольцевые операции.

Определение 10.1 (Полином Жегалкина)**. Моном** от атомов $a_1, \dots, a_n$ есть произведение различных атомов; пустое произведение равно 1. **Полином Жегалкина** есть сумма различных мономов; пустая сумма равна 0. Формуле $\mathcal{A}$ с атомами из $a_1, \dots, a_n$ сопоставляется полином $p_{\mathcal{A}}$: $p_{a_i} = a_i$ и

$$p_{\neg\mathcal{A}} = 1 + p_{\mathcal{A}}, \qquad p_{\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}} = p_{\mathcal{A}} p_{\mathcal{B}},$$
$$p_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}} = p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} + p_{\mathcal{A}} p_{\mathcal{B}}, \qquad p_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = 1 + p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{A}} p_{\mathcal{B}},$$

где скобки раскрываются и подобные приводятся по правилам $x^2 = x$, $x + x = 0$.

Теорема 10.2 (И. И. Жегалкин, 1927)**.** *При $n \geqslant 1$ всякая функция из B_n записывается единственным полиномом Жегалкина от n переменных, и функция $f_{\mathcal{A}}$ записывается полиномом $p_{\mathcal{A}}$.*

Доказательство. Второе утверждение проверяется структурной индукцией по приведённым равенствам. По предложению 7.5 всякая функция из B_n есть $f_{\mathcal{A}}$, поэтому записывается полиномом. Мономов от n атомов 2^n, полиномов 2^{2^n}, то есть столько же, сколько функций в B_n. Поэтому запись единственна. □

Следствие 10.3. *Для формул $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ с атомами из $a_1, \dots, a_n$:*

(a) $\vdash \mathcal{A}$ *тогда и только тогда, когда* $p_{\mathcal{A}} = 1$*;*

(b) $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *эквивалентны в пустом контексте тогда и только тогда, когда* $p_{\mathcal{A}} = p_{\mathcal{B}}$*;*

(c) $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ *тогда и только тогда, когда* $p_{\mathcal{A}} p_{\mathcal{B}} = p_{\mathcal{A}}$.

Доказательство. По теореме 9.3 и следствию 9.4 выводимость и эквивалентность сводятся к равенствам функций, а функции по теореме 10.2 однозначно записываются полиномами. Пункт (c) есть пункт (a) для формулы $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$. □

Пример. Закон Пирса $((a \to b) \to a) \to a$ проверяется в две строки. Имеем $p_{a\to b} = 1 + a + ab$, откуда

$$p_{(a\to b)\to a} = 1 + (1 + a + ab) + (1 + a + ab)a = a + ab + ab = a,$$

то есть формула $(a \to b) \to a$ эквивалентна атому a. Поэтому $p_{((a\to b)\to a)\to a} = 1 + a + a \cdot a = 1$, и формула выводима; сам вывод из аксиом для этого не требуется.

Общие утверждения. Таблица истинности проверяет каждую формулу отдельно, а вычисление в кольце даёт утверждения о бесконечных семействах формул. Запись $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ сокращает $(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$. Её полином линеен: $p_{\mathcal{A}\leftrightarrow\mathcal{B}} = 1 + p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}}$.

Предложение 10.4 (С. Лесьневский, 1929)**.** *Формула, построенная из атомов с помощью одной лишь связки $\leftrightarrow$, есть теорема тогда и только тогда, когда каждый атом входит в неё чётное число раз.*

Доказательство. Индукцией по построению: полином формулы с m вхождениями атомов равен сумме этих вхождений и $m - 1$ единиц. Атом с чётным числом вхождений при сложении сокращается. Если таковы все атомы, то m чётно и полином равен 1. Иначе в полиноме остаётся атом, и он отличен от 1. Остаётся применить следствие 10.3 (a). □

Контекст и идеал. В кольце контекст переводится в идеал: $C_1, \dots, C_k \vdash \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $1+p_{\mathcal{B}}$ лежит в идеале, порождённом полиномами $1+p_{C_i}$. Если $1+p_{\mathcal{B}}$ лежит в этом идеале, то там, где все p_{C_i} равны 1, полином $p_{\mathcal{B}}$ также равен 1, и применяется теорема 9.3. Обратно, при $q = p_{C_1} \cdots p_{C_k}$ выводимость означает $q(1+p_{\mathcal{B}}) = 0$, откуда $1+p_{\mathcal{B}} = (1+q)(1+p_{\mathcal{B}})$, а $1+q$ лежит в идеале. Гомоморфизм h из доказательства теоремы 9.3 есть эпиморфизм на $\mathbb{F}_2$, а дополнение ультрафильтра U есть его ядро, максимальный идеал кольца LT_Γ.

11. Двойственность, единственность двузначной модели и полнота по Посту

Таблица истинности из § 7 не выбирается среди других: аксиомы и правило Modus Ponens определяют её однозначно с точностью до перестановки значений 0 и 1, а эта перестановка отвечает переходу к двойственным формулам. Расширить же исчисление с сохранением непротиворечивости и замкнутости относительно подстановки нельзя.

Определение 11.1 (Двойственная формула)**.** Формула $\mathcal{A}^*$ определяется рекурсией: $a^* \equiv a$ для атомов, $(\neg\mathcal{A})^* \equiv \neg\mathcal{A}^*$, $(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})^* \equiv \mathcal{A}^* \vee \mathcal{B}^*$, $(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})^* \equiv \mathcal{A}^* \wedge \mathcal{B}^*$, $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})^* \equiv \neg\mathcal{A}^* \wedge \mathcal{B}^*$.

Теорема 11.2 (Принцип двойственности; Ч. Пирс, Э. Шрёдер)**.** *Если атомы формулы $\mathcal{A}$ содержатся среди $a_1, \dots, a_n$, то $f_{\mathcal{A}^*}(x_1, \dots, x_n) = \neg f_{\mathcal{A}}(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$. Следовательно:*

(a) *$\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}^* \vdash \mathcal{A}^*$; в частности, формулы $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ эквивалентны в пустом контексте тогда и только тогда, когда эквивалентны $\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*$;*

(b) *$\vdash \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\vdash \neg\mathcal{A}^*$.*

Доказательство. Равенство проверяется структурной индукцией. Для атома оно есть $x = \neg\neg x$, для отрицания следует из предположения индукции, для остальных связок есть закон де Моргана в $\mathbb{B}$. Например, для импликации при $\vec{y} = \langle \neg x_1, \dots, \neg x_n \rangle$ имеем

$$f_{\neg\mathcal{A}^*\wedge\mathcal{B}^*}(\vec{x}) = f_{\mathcal{A}}(\vec{y}) \wedge \neg f_{\mathcal{B}}(\vec{y}) = \neg\big(\neg f_{\mathcal{A}}(\vec{y}) \vee f_{\mathcal{B}}(\vec{y})\big) = \neg f_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}(\vec{y}).$$

По теореме 9.3 выводимость $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ означает $f_{\mathcal{A}} \leqslant f_{\mathcal{B}}$ поточечно, а это неравенство равносильно $f_{\mathcal{B}^*} \leqslant f_{\mathcal{A}^*}$. Выводимость $\vdash \mathcal{A}$ означает, что $f_{\mathcal{A}}$ тождественно равна 1, а это равносильно тому, что $f_{\mathcal{A}^*}$ тождественно равна 0. □

В терминах словаря двойственность обращает порядок: отображение $y \mapsto \neg y$ есть изоморфизм булевой алгебры на алгебру, в которой $\wedge$ и $\vee$, 0 и 1 меняются ролями. Поэтому вместе со всяким тождеством верно двойственное; так, дистрибутивность $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ влечёт $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, а теореме $a \vee \neg a$ отвечает теорема $\neg(a \wedge \neg a)$.

Предложение 11.3 (Единственность двузначной модели)**.** *Пусть на двухэлементном множестве заданы операции* $\neg, \wedge, \vee, \to$*, по которым оценки продолжаются на формулы, и выделен один элемент. Он обозначается* 1*, второй элемент —* 0*. Если из* $x = 1$ *и* $x \to y = 1$ *следует* $y = 1$*, а все аксиомы получают значение* 1 *при всякой оценке, то это операции из § 7.*

Доказательство. Условие на Modus Ponens даёт $1 \to 0 = 0$. Утверждение консеквента при $x = 1$ даёт $1 \to (y \to 1) = 1$, откуда $y \to 1 = 1$; при $x = y = 0$ оно даёт $0 \to (0 \to 0) = 1$, откуда $0 \to 0 = 1$. Тем самым импликация совпадает с табличной, и $x \to y = 1$ равносильно $x \leqslant y$. Удаление конъюнкции даёт $x \wedge y \leqslant \min(x, y)$, а введение конъюнкции при $x = y = 1$ даёт $1 \wedge 1 = 1$. Введение дизъюнкции даёт $x \vee y \geqslant \max(x, y)$, а конструктивная дилемма при $x = y = z = 0$ даёт $(0 \vee 0) \to 0 = 1$, то есть $0 \vee 0 = 0$. Закон Дунса Скота при $x = 1$, $y = 0$ даёт $\neg 1 \to 0 = 1$, то есть $\neg 1 = 0$. Введение отрицания при $x = y = 0$ даёт $1 \to (1 \to \neg 0) = 1$, то есть $\neg 0 = 1$. □

Число наборов операций на $\{0, 1\}$ равно $4 \cdot 16^3 = 16384$, и при каждом из двух выделенных значений моделью ИВ является ровно один набор. При выделенном значении 1 это $\mathbb{B}$. При выделенном значении 0 это *перевёрнутая* модель: $\neg x = 1 - x$, $x \wedge y = \max(x, y)$, $x \vee y = \min(x, y)$, $x \to y = \min(1 - x, y)$. Перестановка значений есть изоморфизм этих двух моделей. Значение формулы $\mathcal{A}$ в перевёрнутой модели равно значению $\mathcal{A}^*$ в $\mathbb{B}$ при той же оценке, поэтому вычисление в перевёрнутой модели есть вычисление двойственной формулы: формула $\mathcal{A}$ есть теорема тогда и только тогда, когда $f_{\mathcal{A}^*}$ тождественно равна 0.

По теореме 9.3 теоремы суть в точности тавтологии, поэтому всякое исчисление в том же языке, корректное относительно $\mathbb{B}$, содержится в ИВ. Расширить ИВ с сохранением замкнутости относительно подстановки можно только до противоречивого исчисления.

Предложение 11.4 (Полнота по Посту)**.** *Если* $\mathcal{A}$ *не является теоремой, то при добавлении к аксиомам всех формул, получаемых из* $\mathcal{A}$ *подстановками вместо атомов, выводимой становится всякая формула.*

Доказательство. По теореме 9.3 существует оценка ε с $\varepsilon(\mathcal{A}) = 0$. Пусть c — атом, не входящий в $\mathcal{A}$. Формула $c \to c$ при всякой оценке имеет значение 1, формула $\neg(c \to c)$ — значение 0. Подстановка вместо каждого атома a формулы $\mathcal{A}$ первой из них при $\varepsilon(a) = 1$ и второй при $\varepsilon(a) = 0$ даёт формулу $\mathcal{A}'$, значение которой при всякой оценке равно $\varepsilon(\mathcal{A}) = 0$. Поэтому $\neg\mathcal{A}'$ есть тавтология и по теореме 9.3 теорема. В расширенном исчислении выводимы $\mathcal{A}'$ и $\neg\mathcal{A}'$, откуда по закону Дунса Скота выводима всякая формула. □

Этот результат получен Д. Гильбертом и П. Бернайсом (1918; см. Zach, 1999) и Э. Постом (1921). Следовательно, всякое непротиворечивое исчисление в том же языке, замкнутое относительно подстановки и Modus Ponens и отличное от ИВ, не содержит некоторых его теорем. Таково положение интуиционистской логики, релевантных логик и многозначных логик, лежащих между интуиционистской и классической: их теоремы составляют часть теорем ИВ.

Резюме

Построение части I состоит из следующих этапов.

1. ИВ вводится как экспликат: формальная система, замещающая обыденное рассуждение в функциях, нужных математическому доказательству. Её соответствие обыденной логике теоремой не является и теоремой о полноте не устанавливается; область её применения есть математика, включая информатику.

2. Зафиксирована финитарная база метаязыка: конечный список знаков, слова и приписывание, графическое тождество $\equiv$, предикаты, обычная логика в простых формулировках, рекурсивное построение классов слов и метапеременные.

3. Заданы алфавит $\mathfrak{S}$ и слова $\mathfrak{S}^*$ с метапеременными ξ, η, ζ; построены предикаты Atom и Form с метапеременными a, b, c и $\mathcal{A}, \mathcal{B}, C$; введена подстановка $\mathcal{A}[\mathcal{B}/a]$, сохраняющая формулы; доказана однозначность разбора.

4. Аксиомы заданы схемами, предикат теоремы Thm — замыканием относительно Modus Ponens.

5. Конечные списки формул определены как слова расширенного алфавита $\mathfrak{S}'$; выводимость $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ задана как предикат на формулах в контексте Γ, который может быть пустым; она сохраняется при подстановке, согласованно проведённой в контексте и в заключении.

6. Сохраняются понятие конечной итерации и содержательная арифметика (замечание 2.1); утверждения о произвольных бесконечных совокупностях гипотез в базе не формулируются.

Часть II переводит исчисление на язык алгебры: формулам сопоставляются значения, а главными требованиями к классу моделей служат корректность и полнота. Функциональная модель B_n сводит формулу с n атомами к булевой функции, и всякая такая функция задаётся формулой. Булевы алгебры образуют класс моделей, относительно которого ИВ полно в силу конструкции LT_Γ; эта конструкция даёт словарь перевода, в котором выводимости отвечает порядок алгебры. Теорема Поста сводит класс к одной модели $\mathbb{B}$, а следствие 9.4 отождествляет B_n с фрагментом алгебры Линденбаума–Тарского. В булевом кольце формулы записываются полиномами Жегалкина, и логические вычисления сводятся к арифметике по модулю 2. Двузначная модель единственна с точностью до перестановки значений, а эта перестановка отвечает переходу к двойственным формулам. Расширить ИВ с сохранением непротиворечивости и замкнутости относительно подстановки нельзя.

Литература

Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т. 1: Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1979.

Жегалкин И. И. О технике вычислений предложений в символической логике // Математический сборник. 1927. Т. 34, вып. 1.

Казимиров Н. И. Архитектура математических моделей: конспект курса, подраздел «Алгебра Линденбаума–Тарского».

Казимиров Н. И. Математика как иностранный. mathem.at/Materials/maglish_index.html

Клини С. К. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.

Куайн У. В. О. Слово и объект. М.: Логос; Праксис, 2000.

Марков А. А. Теория алгорифмов // Труды МИАН. 1954. Т. 42.

Расёва Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М.: Наука, 1972.

Carnap R. Logical Foundations of Probability. Chicago: University of Chicago Press, 1950.

Carroll L. What the Tortoise said to Achilles // Mind. 1895. Vol. 4.

Kreisel G. Informal rigour and completeness proofs // Problems in the Philosophy of Mathematics / ed. I. Lakatos. Amsterdam: North-Holland, 1967.

Post E. Introduction to a general theory of elementary propositions // American Journal of Mathematics. 1921. Vol. 43.

Zach R. Completeness before Post: Bernays, Hilbert, and the development of propositional logic // Bulletin of Symbolic Logic. 1999. Vol. 5.