О математической индукции

Н. И. Казимиров

2026

Содержание

1. Формализации и разновидности индукции

Принцип математической индукции представляет собой несущую конструкцию регулярных дискретных систем. В зависимости от экспрессивной мощности языка и дедуктивной силы базовой теории, индукция принимает существенно различные логические формы.

1.1. Первопорядковая и второпорядковая формулировки

В первопорядковой арифметике Пеано (PA) индукция не может быть выражена единой формулой в силу невозможности квантификации по предикатам: формально она постулируется как счётная схема аксиом, по одной для каждой формулы $\varphi(a)$ (возможно, с параметрами $\vec{p}$):

$$\varphi[a/0] \land \forall x(\varphi[a/x] \to \varphi[a/Sx]) \to \forall y\ \varphi[a/y].$$

Содержательно, однако, эту схему привычнее и понятнее записывать в форме, к которой математики привыкли по индуктивным определениям в теории множеств, — отождествляя формулу φ с её объёмом $X = \{x \mid \varphi(x)\}$:

$$I: \qquad \forall X \Big(0 \in X \ \land \ \forall x \, (x \in X \to Sx \in X) \ \to \ \forall x \, (x \in X) \Big). \tag{1}$$

Нужно сразу же оговорить, в каком смысле следует понимать запись $\forall X$ в (1): в первопорядковом языке PA квантификации по множествам не существует, так что (1) — это *метазапись* схемы аксиом (по всем формулам φ, задающим X), а не одна формула с настоящим квантором второго порядка. Именно эту схему – обозначаемую I в согласии с уже принятыми обозначениями $I\Sigma_n$, $I\Delta_0$ для её фрагментов по сложности формулы φ – мы подробно обсудим в §2, вместе с несколькими равносильными ей принципами.

В системе анализа второго порядка (Z_2), где квантификация по множествам разрешена самим языком, схема (1) сворачивается в буквальную единую аксиому того же вида – уже без оговорки о метазаписи:

$$\forall X \left(0 \in X \land \forall x(x \in X \to S(x) \in X) \to \forall y(y \in X)\right). \tag{2}$$

Дедуктивная мощность Z_2 определяется тем, какая *схема свёртывания* (comprehension) постулируется для существования множеств $X = \{x \mid \varphi(x)\}$: чем шире класс формул φ, для которых гарантировано существование такого X, тем на больший запас «множеств» распространяется единая аксиома (2). При непредикативном свёртывании (принятом в полной Z_2) это охватывает уже произвольное подмножество, определимое во всём языке анализа.

1.2. Разновидности индукции по сложности формул и параметрам

1. **Ограничение по иерархии формул ($I\Sigma_n$, $I\Pi_n$):** Ограничение кванторной сложности формулы φ в схеме индукции порождает строгую дедуктивную иерархию подсистем арифметики. Например, $I\Sigma_1$ достаточна для доказательства тотальности примитивно рекурсивных функций, тогда как $I\Delta_0$ (индукция по формулам с ограниченными кванторами) не способна доказать тотальность экспоненты.

2. **Индукция с параметрами и без (Parameter-free induction):** В полной PA наличие свободных переменных $\vec{p}$ в формуле φ не увеличивает силу теории. Однако для ограниченных фрагментов типа $I\Sigma_n^-$ (без параметров) сила теории строго меньше, чем для фрагментов с параметрами $I\Sigma_n$.

3. **Индукция вдоль упорядочений:** Обобщение локального шага на произвольные вполне упорядоченные множества.

1.3. Индукция в теории множеств

В теории множеств Цермело–Френкеля (ZFC) индукция по натуральным числам является следствием аксиомы бесконечности, гарантирующей существование индуктивного множества ω:

$$\exists X\,(\emptyset \in X \wedge \forall x \in X(x \cup \{x\} \in X))\,. \tag{3}$$

Множество ω определяется как пересечение всех таких индуктивных множеств, из чего тривиально следует стандартная индукция для подмножеств ω.

Трансфинитная индукция обобщает этот принцип на класс всех ординалов On (или на произвольные отношения фундированности):

$$\forall \alpha \in \mathrm{On}\,((\forall \beta < \alpha\ \varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha)) \to \forall \gamma \in \mathrm{On}\ \varphi(\gamma). \tag{4}$$

В ZFC трансфинитная индукция как принцип доказательства (в отличие от трансфинитной *рекурсии*, для определения функций которой существенна именно схема подстановки) является теоремой, опирающейся лишь на аксиому регулярности (фундированности) и схему выделения.

2. Равносильные первопорядковые принципы и метаматематические тонкости

2.1. Пять принципов: определения

Рассмотрим пять ключевых принципов, формулируемых в первопорядковом языке арифметики. Как и в §1.1, каждый из них – схема аксиом (по формуле φ, задающей $X = \{x \mid \varphi(x)\}$), и запись $\forall X(\ldots)$ всюду означает именно эту схему, а не квантор второго порядка. Для x обозначим через $[0, x) \overset{\text{def}}{\rightleftharpoons} \{y \mid y < x\}$ начальный интервал, и договоримся о трёх сокращениях:

$$\mathrm{Ind}(X) \overset{\text{def}}{\rightleftharpoons}\ 0 \in X\ \wedge\ \forall x\,(x \in X \to Sx \in X),$$

$$\mathrm{Prog}(X) \overset{\text{def}}{\rightleftharpoons}\ \forall x\,\big([0, x) \subseteq X\ \to\ x \in X\big),$$

$$\mathrm{Tot}(X) \overset{\text{def}}{\rightleftharpoons}\ \forall x\,(x \in X).$$

Здесь *индуктивность* – условие локального шага; *прогрессивность* – замкнутость относительно начальных интервалов; *тотальность* – утверждение, что X содержит вообще все элементы. Тогда:

1. **Локальная индукция (I).**
   $\forall X\big(\mathrm{Ind}(X) \to \mathrm{Tot}(X)\big)$.

2. **Возвратная (полная) индукция (I^*).**
   $\forall X\big(\mathrm{Prog}(X) \to \mathrm{Tot}(X)\big)$.

3. **Принцип наименьшего элемента (L).**
   $\forall X\big(X \neq \varnothing\ \to\ \exists x \in X\, \forall y \in X\ (x \leqslant y)\big)$.

4. **Принцип бесконечного спуска (D).**
   $\forall X\bigl(X \neq \varnothing \ \to\ \neg\bigl(\forall x \in X\, \exists y \in X\, (y < x)\bigr)\bigr).$

5. **Схема коллекции (B).**
   $\forall a\, \bigl(\forall x{<}a\, \exists y\, \varphi(x,y) \ \to\ \exists z\, \forall x{<}a\, \exists y{<}z\, \varphi(x,y)\bigr).$

(Схему B неудобно и неестественно записывать через характеристическое множество X – по своей форме она устроена иначе, как утверждение о двуместном отношении $\varphi(x,y)$, – поэтому для неё мы сохраняем обычную формульную запись.)

2.2. Равносильность I^*, L, D в чистом исчислении предикатов

Принципиально важное наблюдение: I^*, L и D равносильны друг другу уже в чистом исчислении предикатов – без единой арифметической аксиомы, – если потребовать от $<$ быть отношением строгого линейного порядка. Нам не нужна здесь подробная аксиоматика порядка (это не наша цель); важно лишь одно её следствие – *трихотомия*: для любых x, y верно ровно одно из трёх: $x < y$, $x = y$, $y < x$. Трихотомия используется ровно один раз: чтобы связать «отрицательную» форму принципа D (выраженную через $<$) с его логическим двойником – привычной для математика «позитивной» формой L (через $\leqslant$, сравнение с *каждым* элементом X).

Предложение 1. *Для любой формулы φ (с $X = \{x \mid \varphi(x)\}$):*

(a) в чистом исчислении предикатов $I^*_{\neg\varphi} \iff D_\varphi$;

(b) если, кроме того, $<$ удовлетворяет трихотомии, то $D_\varphi \iff L_\varphi$.

Поскольку класс формул замкнут относительно $\varphi \mapsto \neg\varphi$, отсюда вытекает равносильность полных схем $I^* \iff D \iff L$.

Доказательство. (a) Схема I^* для формулы $\neg\varphi$ имеет вид $A \to B$, где (разворачивая Prog и Tot по определению)

$$A \equiv \forall x\bigl(\forall y{<}x\, (\neg\varphi(y)) \to \neg\varphi(x)\bigr), \qquad B \equiv \forall x\, (\neg\varphi(x)).$$

По закону контрапозиции $A \to B$ равносильно $\neg B \to \neg A$ – чистая пропозициональная тавтология, не требующая никаких новых аксиом. Раскрывая отрицания по правилам де Моргана и двойственности кванторов:

$$\neg B \equiv \exists x\, (\varphi(x)) \equiv X \neq \varnothing, \qquad \neg A \equiv \exists x\bigl(\varphi(x)\ \wedge\ \forall y{<}x\, (\neg\varphi(y))\bigr).$$

Внутри $\neg A$ подформула «$\forall y{<}x\, \neg\varphi(y)$», то есть «$\forall y\, (y < x \to \neg\varphi(y))$», сама по чистой логике равносильна своей контрапозиции «$\forall y\, (\varphi(y) \to \neg(y < x))$», то есть «$\forall y \in X\, \neg(y < x)$». Значит,

$$\neg A \equiv \exists x \in X\, \forall y \in X\, \neg(y < x) \equiv \neg\bigl(\forall x \in X\, \exists y \in X\, (y < x)\bigr),$$

и импликация $\neg B \to \neg A$ – это в точности D_φ.

(b) Раскрыв внутреннее отрицание, D_φ утверждает: $X \neq \varnothing \to \exists x \in X\, \forall y \in X\, \neg(y < x)$. Формула L_φ устроена буквально так же, только с «$\neg(y < x)$», заменённым на «$x \leqslant y$». По трихотомии это одно и то же условие: $\neg(y < x)$ означает, что либо $y = x$, либо $x < y$, то есть ровно $x \leqslant y$. □

Итак, равносильность $I^* \iff L \iff D$ – факт *логики*, а не арифметики: доказательство не использует ни число 0, ни операцию $+1$, а лишь линейность порядка $<$.

2.3. Равносильность I и I^*: роль минимальной арифметики последователя

Связь локальной индукции I с тройкой I^*, L, D устроена принципиально иначе: она неотделима от последователя S и потому не может быть чисто логическим фактом. Нам понадобятся три элементарных факта о $<$ и S. Здесь стоит быть аккуратным с тем, откуда они берутся: в арифметике Робинсона Q отношение $<$ обычно вообще не примитивно, а *определяется* экзистенциальной формулой ($x < y \overset{\text{def}}{\rightleftharpoons} \exists z\,(Sz + x = y)$), и доказательство того, что это определение равносильно приводимым ниже рекурсивным тождествам, само по себе не совсем тривиально и зависит от способа рекурсивного разворачивания $+$. Чтобы не оставлять это висящим в воздухе, зафиксируем $<$ как примитивное отношение и введём теорию

$$\mathsf{PA}_-^{\text{rec}} \overset{\text{def}}{\rightleftharpoons} \Big\{\, x + 0 = x,\ x + Sy = S(x+y),\ x \cdot 0 = 0,\ x \cdot Sy = x \cdot y + x,$$
$$Sx \neq 0,\ Sx = Sy \to x = y \,\Big\} \cup \{\text{(O1)–(O3)}\}$$

– по существу это арифметика Робинсона в её исходной, рекурсивной форме, с явно постулированными (а не выведенными) аксиомами порядка (O1)–(O3):

(O1) $\neg(x < 0)$ – 0 есть наименьший элемент;

(O2) $y < Sx \leftrightarrow y \leqslant x$ – рекурсивная связь порядка с последователем;

(O3) $x \neq 0 \to \exists y\,(x = Sy)$ – всякий ненулевой элемент есть последователь.

Все три – аксиомы $\mathsf{PA}_-^{\text{rec}}$, а не теоремы, выводимые из чего-то более простого.

Лемма 2. *Из (O1)–(O3) следует: для всякого X,* $\text{Ind}(X) \to \text{Prog}(X)$.

Доказательство. Пусть выполнено $\text{Ind}(X)$, то есть $0 \in X$ и $\forall z\,(z \in X \to Sz \in X)$. Возьмём произвольный x с $[0, x) \subseteq X$; покажем $x \in X$. По (O3) либо $x = 0$, либо $x = Sz$ для некоторого z. Если $x = 0$: тогда $x \in X$ прямо по первому конъюнкту $\text{Ind}(X)$. Если $x = Sz$: то по (O2) (при $y = z$) имеем $z < Sz = x$, откуда $z \in [0, x) \subseteq X$, то есть $z \in X$; тогда по второму конъюнкту $\text{Ind}(X)$ получаем $Sz = x \in X$. $\square$

Предложение 3. *При наличии (O1)–(O3), из I^* следует I.*

Доказательство. Пусть выполнено $\text{Ind}(X)$. По Лемме, $\text{Prog}(X)$. Применяя I^*, получаем $\text{Tot}(X)$ – заключение I. $\square$

Отметим: аксиома (O3) использована здесь единственный раз – в разборе случаев для x (либо 0, либо последователь). Без неё нельзя было бы гарантировать, что каждый ненулевой элемент «достижим шагом индукции» из какого-то предыдущего.

Предложение 4. *При наличии лишь (O1)–(O2) (аксиома (O3) не требуется!), из I следует I^*.*

Доказательство. Пусть выполнено $\text{Prog}(X)$. Определим вспомогательное множество

$$Y \overset{\text{def}}{\rightleftharpoons} \{x \mid [0, x) \subseteq X\}$$

– максимальный начальный интервал, целиком лежащий в X.

$Y \subseteq X$. Если $x \in Y$, то $[0, x) \subseteq X$ – а это в точности посылка $\mathrm{Prog}(X)$ при данном x, так что немедленно $x \in X$.

$\mathrm{Ind}(Y)$. *База:* по (O1) $[0, 0) = \varnothing \subseteq X$, так что $0 \in Y$. *Шаг:* пусть $z \in Y$, то есть $[0, z) \subseteq X$; по уже доказанному $Y \subseteq X$ также $z \in X$, так что $[0, z) \cup \{z\} \subseteq X$. По (O2), $[0, Sz) = [0, z) \cup \{z\}$ (ведь $y < Sz \leftrightarrow y \leqslant z \leftrightarrow y < z \vee y = z$), так что $[0, Sz) \subseteq X$, то есть $Sz \in Y$.

Применяя I к Y, получаем $\mathrm{Tot}(Y)$. Вместе с уже установленным $Y \subseteq X$ это немедленно даёт $\mathrm{Tot}(X)$ – заключение I^*. □

Асимметрия направлений здесь содержательна. Направление $I^* \Rightarrow I$ (Лемма выше) существенно использует все три факта (O1)–(O3), причём именно (O3) играет решающую роль – в разборе случаев «x есть 0 или последователь». Направление $I \Rightarrow I^*$, напротив, обходится фактами (O1)–(O2) и в его доказательстве (O3) попросту не используется.

(O3) существенно: модель, где I^* есть, а I – нет. Возьмём в качестве носителя ординал $\omega + \omega$ – две последовательные копии $\mathbb{N}$, с обычным ординальным порядком $<$, и определим последователь S *отдельно внутри каждой копии*: $S(n) = n + 1$ в первой копии, $S(\omega + n) = \omega + n + 1$ во второй. Функция S всюду определена и инъективна, (O1)–(O2) выполнены, но элемент ω (начало второй копии) не есть $S(y)$ ни для какого y – это ровно предельный ординал, на котором ломается (O3).

Поскольку $\omega + \omega$ – честный ординал, то есть вполне упорядоченное множество, трансфинитная индукция (§1.3) верна в нём для *произвольных* подмножеств носителя – а не только для подмножеств, задаваемых формулой, – так что I^* (а вместе с ним L и D) выполняется здесь в подлинно втором порядке, без всяких оговорок про схему.[1] А вот I – нет: множество X = первая копия $\mathbb{N}$ содержит 0 и замкнуто относительно S (то есть $\mathrm{Ind}(X)$), но $X \neq \omega + \omega$. Именно это и предсказывает асимметрия выше: модель нарушает (O3) – и вместе с ним I, – но никак не трогает чисто логическую тройку I^*, L, D.

2.4. Схема коллекции B и индукция

Природа связи между схемой коллекции B и схемой индукции I иная и заметно более тонкая метаматематически, чем всё рассмотренное выше: она не сводится ни к чистой логике, ни к минимальной арифметике последователя. Мы не будем доказывать её здесь, ограничившись точной формулировкой известного результата.

Внутри слабой базовой теории PA^- (аксиомы дискретного упорядоченного полукольца без индукции, см. Kaye, *Models of Peano Arithmetic*) схема B сама по себе **не влечёт** схему I. Но уже относительно базовой индукции по Δ_0-формулам ($I\Delta_0$) связь восстанавливается и принимает вид строгой иерархии (Paris–Kirby, 1978):

$$I\Sigma_n \;\to\; B\Sigma_n \;\to\; I\Sigma_{n-1} \qquad (n \geq 1),$$

[1] Замечание для осторожного читателя: не значит ли это, что индукция вообще «навязывает» модели быть вполне упорядоченной, то есть стандартной? Нет: существуют нестандартные модели PA, в которых полная схема I (а с ней и I^*, L, D как схемы) выполнена, однако сама модель, если смотреть на неё *извне*, вполне упорядоченной не является – в ней есть (неопределимые в языке PA) подмножества без наименьшего элемента. Противоречия здесь нет: как схема аксиом, I^* гарантирует наименьший элемент лишь для подмножеств, *определимых* формулой языка PA; на «неправильные» подмножества нестандартной модели эта схема просто не распространяется. В примере выше мы законно потребовали I^* для абсолютно всех подмножеств носителя именно потому, что $\omega + \omega$ по построению стандартна (совпадает с настоящим ординалом); для нестандартных моделей такой роскоши уже нет.

а на уровне полных (неограниченных по сложности формулы) схем – $I \iff B$ относительно базы $I\Delta_0$. Иерархия связей между всеми пятью принципами показана на диаграмме:

$$\begin{tikzcd} \boxed{I^* \Leftrightarrow L \Leftrightarrow D} \arrow[r, shift left, Rightarrow, "\text{(O2),(O3)}"] & \boxed{I} \arrow[l, shift left, Rightarrow, "\text{(O1),(O2)}"] \arrow[r, shift left, Rightarrow, "I\Delta_0"] & \boxed{B} \arrow[l, shift left, Rightarrow, "I\Delta_0"] \end{tikzcd}$$

Равносильность $I^* \Leftrightarrow L \Leftrightarrow D$ доказана в §2.2 чисто логически, с точностью до трихотомии $<$. Переход к I требует минимальной арифметики последователя (§2.3): именно аксиома (O3) создаёт асимметрию – она нужна для $I^* \Rightarrow I$, но не для $I \Rightarrow I^*$. Переход к схеме коллекции B существенно использует индукцию $I\Delta_0$; доказательство не приводится.

3. Следствия принципа индукции в математических структурах

Ниже приведен перечень глубоких математических утверждений, справедливость которых существенно завязана на дедуктивную силу индукции. Там, где это возможно, указан точный статус утверждения в терминах подсистем арифметики второго порядка (RCA_0, WKL_0, ACA_0).

3.1. Принцип Дирихле (Pigeonhole Principle)

Функциональная формулировка: если A и B — конечные множества, причем мощность A строго больше мощности B, то не существует инъективного отображения $f : A \to B$. *Статус:* Доказуемость принципа Дирихле является классическим вопросом теории доказательств. По теореме Пэриса–Уилки–Вудса и Айтаи (1988), PHP даже для Δ_0-определимых функций не доказуем в $I\Delta_0$ — то есть одна из самых элементарных комбинаторных истин невыводима из ограниченной индукции, что демонстрирует крайнюю слабость $I\Delta_0$ как базовой теории.

3.2. Лемма Кёнига о бесконечном пути

Формулировка в языке частично упорядоченных множеств: Если конечно-ветвящееся частично упорядоченное множество $(T, \leqslant_T)$, являющееся деревом с единственным корнем, содержит бесконечное число элементов, то оно содержит бесконечную цепь (путь). *Статус:* Слабая лемма Кёнига (WKL_0, для бинарных деревьев) эквивалентна компактности отрезка в матанализе. Полная лемма Кёнига (для любых конечно-ветвящихся деревьев) строго мощнее и эквивалентна арифметической схеме свертывания ACA_0. Дополнительная сила по сравнению с WKL_0 возникает не из индукции (схема индукции в обеих системах одна и та же), а именно из арифметической схемы свертывания: чтобы на каждом шаге выбрать поддерево с бесконечным числом вершин, нужно разрешить предикат «поддерево бесконечно», который для произвольных (не только бинарных) деревьев не сводится к Δ_0-условию и требует именно ACA_0.

3.3. Алгебраические законы в PA

Коммутативность и ассоциативность сложения ($\forall x, y\ x + y = y + x$) и умножения.

Уточнение базовой теории. Здесь важно оговорить, о какой именно безындукционной теории идёт речь. Теория PA^-, использованная в §2.4 (теория неотрицательных частей дискретно упорядоченного кольца, см. Kaye, *Models of Peano Arithmetic*), уже *постулирует* коммутативность и ассоциативность $+$ и $\times$ как отдельные неиндукционные аксиомы — поэтому о «некоммутативных моделях PA^-» говорить нельзя: это противоречило бы самому определению PA^-. Утверждение ниже относится к более слабой теории $\mathsf{PA}^{\mathrm{rec}}_-$, введённой в §2.3, – арифметике Робинсона в её исходной, рекурсивной форме, с явными аксиомами порядка (O1)–(O3), но без индукции и без отдельного постулирования коммутативности или ассоциативности.

Модель без коммутативности: Вывести переместительный закон в $\mathsf{PA}^{\mathrm{rec}}_-$ без индукции невозможно: существуют (необходимо нестандартные) модели $\mathsf{PA}^{\mathrm{rec}}_-$, в которых сложение некоммутативно. Содержательная иллюстрация того же явления — хотя и не буквальная модель $\mathsf{PA}^{\mathrm{rec}}_-$, а структура другого типа (упорядоченный моноид) — арифметика ординалов: для первого трансфинитного ординала ω справедливо $\omega + 1 \neq 1 + \omega$. Именно невозможность вывести коммутативность без индукции и есть причина, по которой PA^- в смысле Kaye включает коммутативность и ассоциативность в список аксиом явно, а не пытается получить их как следствия.

3.4. Теория конечных множеств по Дедекинду

1. **Собственные подмножества:** Утверждение «Если $B \subsetneq A$ и A конечно, то мощность B строго меньше мощности A» является прямым следствием индукции по числу элементов множества A. Без индукции конечные множества ведут себя как квазибесконечные.

2. **Конечность по Дедекинду:** Множество A конечно по Дедекинду, если не существует инъекции $f : A \to A$, не являющейся сюръекцией. С помощью индукции легко доказывается направление «стандартно конечно $\Rightarrow$ конечно по Дедекинду». Обратное направление, однако, из одной индукции не следует: оно доказуемо с помощью счётной аксиомы выбора AC_ω (если множество бесконечно, AC_ω позволяет выбрать в нём счётную подпоследовательность различных элементов, что и даёт нужную несюръективную инъекцию) – но это лишь *следствие* AC_ω, а не равносильное ей утверждение. В любом случае, без всякого выбора в теории ZF это направление недоказуемо: существуют модели ZF с бесконечными дедекиндово-конечными множествами (модели Френкеля–Мостовского, первая модель Коэна).

3.5. Теорема Рамсея (RT^2_2)

Теорему Рамсея для пары цветов понятнее всего формулировать на языке обычных графов, без разговора о раскрасках: для двух цветов один из них – это «есть ребро», а другой – «ребра нет», так что произвольная раскраска пар вершин в 2 цвета – это то же самое, что произвольный граф на этих вершинах.

Конечный случай. Классический пример – «теорема о вечеринке»: среди любых 6 человек (рассмотрим граф знакомств, где ребро – это знакомство) найдутся либо трое, попарно знакомых друг с другом (треугольник в графе), либо трое, попарно не знакомых между собой (треугольник в его дополнении); 6 – наименьшее такое число (число Рамсея $R(3,3) = 6$). В общем виде: для любых k, m существует число Рамсея $R(k,m)$ – наименьшее N, при котором любой граф на N вершинах содержит либо клику размера k, либо независимое множество размера m. Стоит заметить, что даже это чисто конечное по своему содержанию утверждение (лишь квантифицированное по k, m) доказывается индукцией, по сумме $k + m$.

Бесконечный случай (RT^2_2). В любом графе на бесконечном множестве вершин найдётся бесконечное подмножество вершин, образующее либо полный подграф (все рёбра есть), либо вполне несвязный подграф (рёбер нет вовсе). Это прямое следствие индукции (точнее, принципа L: среди «типов» вершин относительно уже отобранных всегда найдётся бесконечно много одинаковых).[2]

3.6. Тотальность функции Аккермана

По теореме Парсонса, доказуемо рекурсивные функции $I\Sigma_1$ суть в точности примитивно рекурсивные функции; поскольку функция Аккермана по построению не примитивно рекурсивна, ее тотальность **недоказуема** в $I\Sigma_1$. Она становится доказуемой уже на следующем уровне, в $I\Sigma_2$ (что соответствует месту функции Аккермана в быстрорастущей иерархии, на уровне ω, тогда как $I\Sigma_1$ покрывает лишь конечные уровни этой иерархии).

3.7. Пределы индукции: теорема Гудстейна и принцип Пэриса–Харрингтона

Все примеры §§3.1–3.6 показывали, сколь многого можно добиться средствами индукции I. Два следующих результата демонстрируют прямо противоположное: у индукции I (то есть у полной схемы индукции PA) есть чёткий, точно измеримый **предел** мощности – и именно эти два примера его маркируют.

Теорема Гудстейна. Сформулирована и доказана (безо всякой связи с метаматематикой PA) Р. Гудстейном ещё в 1944 году: для любого числа n последовательность Гудстейна $g_n(0), g_n(1), g_n(2), \ldots$ (определяемая через запись чисел в наследственной позиционной системе по основанию k, с заменой основания k на $k+1$ и вычитанием единицы на каждом шаге) всегда достигает 0 за конечное число шагов. Это истинное Π_2-предложение языка PA (вида $\forall n\, \exists k\, g_n(k) = 0$); лишь спустя почти четыре десятилетия Кирби и Пэрис (1982) показали, что оно **не выводимо в PA**.

Принцип Пэриса–Харрингтона. Усиленный вариант конечной теоремы Рамсея из §3.5 (с дополнительным требованием «относительной большости» искомого монохроматического множества) – истинное, чисто комбинаторное предложение (Пэрис, Харрингтон, 1977), которое было *сразу же*, при самом своём появлении, предъявлено как пример недоказуемого в PA утверждения. В этом смысле принцип Пэриса–Харрингтона – первый пример *натуральной* (не метаматематической по формулировке, не апеллирующей явно к доказуемости или к гёделевской диагонализации) теоремы, для которой недоказуемость в PA была установлена одновременно с самой теоремой: теорема Гудстейна как *математическое утверждение* появилась значительно раньше (1944), но её независимость от PA была обнаружена лишь позже – под влиянием результата Пэриса и Харрингтона.

[2]Точная обратно-математическая сила RT^2_2 известна и весьма тонка: она доказуема в $\mathsf{RCA}_0 + I\Sigma_2$, но сама не влечёт $I\Sigma_2$ (Чолак–Джокуш–Слейман, 2001) – мы не будем углубляться в эти детали.

Оба факта тем не менее доказуемы средствами, выходящими за пределы I, – в частности, уже в ZFC и в полной второпорядковой арифметике Z_2: достаточно *трансфинитной* индукции вдоль ординала ε_0, доступной уже в относительно скромной подсистеме $\mathsf{ATR}_0 \subseteq \mathsf{Z}_2$. Ординал ε_0 появляется здесь не случайно: по теореме Генцена (1936), это в точности доказательно-теоретический ординал PA – граница, которую индукция I не может формализовать как схему доказательства сама по себе. Иными словами: локальная и возвратная схемы индукции $I \iff I^*$ – при всей демонстрируемой ими мощи – сами по себе **не замкнуты** относительно всех истинных арифметических утверждений; выход за их пределы требует принципиально более сильной формы индукции – трансфинитной, – недоступной как первопорядковая схема аксиом над стандартной моделью ω.

Список обозначений

PA	Арифметика Пеано (первопорядковая, с полной схемой индукции I).
Z_2	Арифметика второго порядка (анализ) с непредикативной схемой свёртывания.
ZFC	Теория множеств Цермело–Френкеля с аксиомой выбора.
PA^-	Аксиомы дискретного упорядоченного полукольца без индукции (в смысле Kaye), с явно постулированными коммутативностью и ассоциативностью $+, \times$.
$\mathsf{PA}^{\mathrm{rec}}_-$	Арифметика Робинсона в рекурсивной форме (уравнения для $+, \times, S$) с явными аксиомами порядка (O1)–(O3), без индукции и без отдельного постулирования коммутативности/ассоциативности (§2.3).
$S, <, \leqslant$	Последователь; строгий и нестрогий порядок на числах.
$[0, x)$	Начальный интервал $\{y \mid y < x\}$.
$\mathrm{Ind}(X)$	Индуктивность X: $0 \in X \wedge \forall x\,(x \in X \to Sx \in X)$.
$\mathrm{Prog}(X)$	Прогрессивность X: $\forall x\,([0, x) \subseteq X \to x \in X)$.
$\mathrm{Tot}(X)$	Тотальность X: $\forall x\,(x \in X)$.
I	Локальная индукция: $\forall X(\mathrm{Ind}(X) \to \mathrm{Tot}(X))$.
I^*	Возвратная (полная, course-of-values) индукция: $\forall X(\mathrm{Prog}(X) \to \mathrm{Tot}(X))$.
L	Принцип наименьшего элемента.
D	Принцип бесконечного спуска (отсутствия бесконечно убывающих цепей).
B	Схема коллекции (collection scheme).

(O1)–(O3)	Аксиомы $\mathsf{PA}^{\mathrm{rec}}_{-}$ о согласовании $<$ и S: 0 – наименьший; $y < Sx \leftrightarrow y \leqslant x$; всякий ненулевой элемент есть последователь.
$I\Sigma_n$, $B\Sigma_n$, $I\Delta_0$	Индукция (соотв. коллекция) для формул ограниченной кванторной сложности; иерархия подсистем PA.
RCA_0	Базовая система обратной математики: рекурсивная схема свёртывания плюс $I\Sigma_1$.
WKL_0	RCA_0 плюс слабая лемма Кёнига (для бинарных деревьев).
ACA_0	RCA_0 плюс арифметическая схема свёртывания.
ATR_0	RCA_0 плюс арифметическая трансфинитная рекурсия; строго сильнее ACA_0.
ε_0	Доказательно-теоретический ординал PA (Генцен, 1936): супремум порядковых типов канонических (натурально заданных) вполне упорядоченных отношений на $\mathbb{N}$, фундированность которых доказуема в PA.[3]
RT^2_2	Теорема Рамсея для пар и двух цветов (в графовой форме – для произвольного графа на бесконечном множестве вершин).

[3] Не наименьший ординал, для которого PA не может доказать фундированность: существуют куда более короткие, но искусственно (через предикат непротиворечивости) устроенные порядки с тем же дефектом. Оговорка про «канонические» порядки как раз и нужна, чтобы отсечь такие патологии – вопрос о точной границе этого понятия является предметом отдельной дискуссии в теории доказательств.