Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов первого порядка

Содержание

1. Постановка задачи

Фиксируем язык первого порядка $\mathcal{L}$ с *конечной сигнатурой*: конечным набором предикатных символов $P_1, \dots, P_k$, функциональных символов $f_1, \dots, f_m$ и констант $a_1, \dots, a_n$. Через $\mathcal{L}^0$ обозначим множество всех *замкнутых* формул (предложений) языка $\mathcal{L}$.

Теорема 1 (Гёдель, 1930)**.** *Пусть* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}^0$ *и* $\varphi \in \mathcal{L}^0$. *Тогда*

$$\Gamma \vDash \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi.$$

Направление ($\Leftarrow$) — *корректность* — доказывается стандартной индукцией по выводу и мы его опускаем. Основное содержание теоремы — направление ($\Rightarrow$), *полнота*, которому посвящён этот текст.

Контрапозитивно, полнота эквивалентна следующему утверждению:

Лемма 2 (о существовании модели)**.** *Всякое непротиворечивое множество* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}^0$ *выполнимо, т. е. существует* $\mathcal{L}$*-структура* $\mathfrak{M}$ *такая, что* $\mathfrak{M} \models \varphi$ *для всех* $\varphi \in \Gamma$.

Доказательству этой леммы и посвящён весь дальнейший текст.

2. Предварительные сведения

2.1. Структуры и истинность

Определение 3. $\mathcal{L}$*-структура* $\mathfrak{M} = \langle M, \{P_i^{\mathfrak{M}}\}, \{f_j^{\mathfrak{M}}\}, \{a_l^{\mathfrak{M}}\}\rangle$ состоит из:

- непустого множества M — *носителя*;
- интерпретации каждого предикатного символа P_i как отношения $P_i^{\mathfrak{M}} \subseteq M^{\mathrm{ar}(P_i)}$;
- интерпретации каждого функционального символа f_j как функции $f_j^{\mathfrak{M}} \colon M^{\mathrm{ar}(f_j)} \to M$;
- интерпретации каждой константы a_l как элемента $a_l^{\mathfrak{M}} \in M$.

Истинность замкнутой формулы φ в структуре $\mathfrak{M}$ (обозначение: $\mathfrak{M} \models \varphi$) определяется стандартной рекурсией по построению φ:

- $\mathfrak{M} \models P_i(t_1, \ldots, t_k)$ если $\langle t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_k^{\mathfrak{M}}\rangle \in P_i^{\mathfrak{M}}$;
- $\mathfrak{M} \models \neg\psi$ если $\mathfrak{M} \not\models \psi$;
- $\mathfrak{M} \models \psi_1 \wedge \psi_2$ если $\mathfrak{M} \models \psi_1$ и $\mathfrak{M} \models \psi_2$;
- $\mathfrak{M} \models \exists x\, \psi(x)$ если существует $a \in M$ такой, что $\mathfrak{M} \models \psi(a)$ (где a рассматривается как новая константа).

2.2. Непротиворечивость

Множество Γ называется *непротиворечивым*, если $\Gamma \nvdash \bot$, то есть из него нельзя вывести противоречие.

3. Расширение языка: константы Хенкина

3.1. Зачем нужны свидетели

Пусть формула $\exists x\, \psi(x)$ истинна в модели. Тогда в модели должен найтись *конкретный элемент*, реализующий ψ. При синтаксическом построении модели такого элемента нет — мы строим носитель из термов языка — поэтому нам нужно заранее «пообещать» имя для каждого подобного элемента.

3.2. Итеративное расширение языка

Поскольку добавление новых констант порождает новые замкнутые формулы (в том числе новые экзистенциальные), расширение языка проводится *итеративно*.

Строим возрастающую цепочку языков:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \cdots$$

Шаг $n \to n+1$. Пусть $\mathcal{L}_n$ уже построен. Зафиксируем перечисление всех экзистенциальных предложений языка $\mathcal{L}_n$:

$$\exists x\, \psi_0^{(n)}(x), \quad \exists x\, \psi_1^{(n)}(x), \quad \ldots$$

Замечание 4 (Реестр свидетелей)**.** Среди формул $\exists x\, \psi_k^{(n)}(x)$ могут встретиться такие, для которых свидетель уже был назначен на одном из предыдущих шагов $i < n$ (например, формула $\exists x\, \psi(x)$ дословно повторилась, потому что вошла в язык $\mathcal{L}_n$ через несколько разных путей построения). Чтобы избежать расточительного дублирования констант для одной и той же формулы, ведём *реестр* $W\colon \{$экз. формулы$\} \rightharpoonup \{$константы$\}$: прежде чем вводить новую константу для $\exists x\, \psi_k^{(n)}(x)$, проверяем, не определён ли уже $W(\exists x\, \psi_k^{(n)}(x))$; если определён — используем существующую константу, если нет — вводим свежую и заносим её в W.

Это техническое уточнение не влияет на корректность дальнейшей конструкции: без реестра (то есть с дублированием констант для повторяющихся формул) доказательство леммы 7 и леммы об истинности проходит без изменений, поскольку ”лишняя” константа — это просто дополнительный, формально независимый элемент будущего носителя. Реестр лишь делает модель экономнее. Важно не путать это с *заменой* уже введённой константы — константы $c_{n,k}$ один раз зафиксированы и в дальнейшем неизменны.

Для каждого такого предложения $\exists x\, \psi_k^{(n)}(x)$, не имеющего свидетеля в реестре W, введём *свежую* константу $c_{n,k}$, не встречавшуюся ни в каком $\mathcal{L}_i$, $i \leq n$. Полагаем

$$\mathcal{L}_{n+1} = \mathcal{L}_n \cup \{c_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}.$$

Расширенный язык и расширенное множество аксиом. Определим

$$\mathcal{L}_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_n.$$

Лемма 5 (замкнутость $\mathcal{L}_\omega$ относительно расширения Хенкина)**.** *Для каждой замкнутой формулы вида $\exists x\, \psi(x)$ языка $\mathcal{L}_\omega$ в $\mathcal{L}_\omega$ уже есть свидетельствующая её константа.*

Доказательство. Формула $\exists x\, \psi(x)$ конечна и потому использует лишь конечное число символов сигнатуры. Поскольку $\mathcal{L}_\omega = \bigcup_n \mathcal{L}_n$ — объединение *возрастающей* цепочки языков, все символы, входящие в формулу, появляются не позднее некоторого конечного шага; значит сама формула целиком принадлежит некоторому $\mathcal{L}_n$. Но тогда $\exists x\, \psi(x)$ встретилась в перечислении экзистенциальных предложений языка $\mathcal{L}_n$ на шаге построения $\mathcal{L}_{n+1}$ (см. замечание 4), и для неё была введена константа $c_{n,k}$ (или переиспользована уже имеющаяся) вместе с аксиомой Хенкина $\exists x\, \psi(x) \to \psi(c_{n,k})$. Эта аксиома лежит в $H \subseteq \mathcal{L}_\omega^0$. □

Замечание 6. Именно эта лемма объясняет, почему ω шагов расширения достаточно и трансфинитная итерация не нужна: любая экзистенциальная формула, *какой бы длинной она ни была*, всё равно конечна, а значит «застревает» на конечном шаге n и получает свидетеля. Понадобиться $\omega+1$-й шаг мог бы лишь в ситуации, когда в языке появлялись бы формулы бесконечной длины — но язык первого порядка такого не допускает.

С каждой парой (n, k) свяжем *аксиому Хенкина*:

$$\exists x\, \psi_k^{(n)}(x) \;\to\; \psi_k^{(n)}(c_{n,k}).$$

Обозначим через H множество всех таких аксиом и положим

$$\Gamma^* \;=\; \Gamma \cup H.$$

Лемма 7. Γ^* *непротиворечиво в языке* $\mathcal{L}_\omega$.

Доказательство. Достаточно показать, что добавление *одной* аксиомы Хенкина к непротиворечивому множеству сохраняет непротиворечивость; тогда утверждение для всего H следует индукцией по числу аксиом, фактически использованных в гипотетическом выводе $\perp$ (вывод конечен, поэтому таких аксиом конечное число, и каждая содержит свою собственную свежую константу, не встречающуюся в остальных — это гарантировано построением).

Базовый шаг. Пусть Σ — непротиворечивое множество формул, и пусть $H \equiv \exists x\, \psi(x) \to \psi(c)$ — аксиома Хенкина, где c — свежая константа, не входящая ни в Σ, ни в ψ. Покажем, что $\Sigma \cup \{H\}$ непротиворечиво.

Предположим противное:

$$\Sigma \cup \bigl\{\exists x\, \psi(x) \to \psi(c)\bigr\} \;\vdash\; \perp.$$

Шаг 1: теорема дедукции. Вынося аксиому Хенкина из посылок, получаем

$$\Sigma \;\vdash\; \bigl(\exists x\, \psi(x) \to \psi(c)\bigr) \to \perp,$$

что по законам логики высказываний (введение отрицания, закон Дунса Скота) равносильно доказательству отрицания самой импликации:

$$\Sigma \;\vdash\; \exists x\, \psi(x) \;\wedge\; \neg\psi(c).$$

Тем самым получены *два независимых* вывода из Σ:

$$\text{(i)} \quad \Sigma \vdash \exists x\, \psi(x), \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \Sigma \vdash \neg\psi(c).$$

Шаг 2: замена константы на переменную. Рассмотрим вывод (ii). Поскольку c нигде не входит ни в Σ, ни в ψ (кроме явно выписанного места подстановки), её присутствие в дереве вывода чисто номинально: заменив всюду в этом дереве c на свежую переменную y, не связываемую никаким квантором, получаем вновь корректное дерево вывода (аксиомы и правила логики применимы к y ровно так же, как к c, поскольку нигде не использовалось, что это именно константа). Следовательно

$$\Sigma \;\vdash\; \neg\psi(y).$$

Шаг 3: обобщение и противоречие. Переменная y не входит свободно ни в одну формулу Σ (она была выбрана свежей), поэтому к выводу $\neg\psi(y)$ законно применимо правило введения квантора всеобщности:

$$\Sigma \ \vdash \ \forall y \, \neg\psi(y).$$

По законам обращения с кванторами $\forall y \, \neg\psi(y)$ логически эквивалентно $\neg\exists y \, \psi(y)$, а с точностью до переименования связанной переменной — формуле $\neg\exists x \, \psi(x)$. Значит

$$\text{(iii)} \quad \Sigma \ \vdash \ \neg\exists x \, \psi(x).$$

Итог. Сопоставляя (i) и (iii): Σ доказывает одновременно $\exists x \, \psi(x)$ и $\neg\exists x \, \psi(x)$, то есть $\Sigma \ \vdash \ \bot$ — противоречие с непротиворечивостью Σ. Заметим, что в этом рассуждении свежая константа c исходной теории Σ нигде больше не появляется: противоречие получено строго внутри Σ.

От одной аксиомы к произвольному конечному множеству. Базовый шаг устраняет ровно одну добавленную аксиому Хенкина. Чтобы распространить результат на всё H, нужно действовать аккуратно: вывод $\Gamma \cup H \vdash \bot$ конечен, поэтому фактически использует лишь конечный список аксиом $H_1, \dots, H_m \in H$, но *нельзя* устранить их все одним применением теоремы дедукции.

Замечание 8 (почему «наивный» путь не работает)**.** Вынося сразу весь список из посылок, получаем

$$\Gamma \ \vdash \ \neg(H_1 \wedge \cdots \wedge H_m) \ \equiv \ \Gamma \ \vdash \ \neg H_1 \vee \cdots \vee \neg H_m.$$

Из доказуемости дизъюнкции в классической логике *не следует* доказуемость хотя бы одного дизъюнкта по отдельности — в отличие от семантического «истинности дизъюнкции», на уровне формального вывода это не свойство $\vdash$. Поэтому распараллелить рассуждение по ветвям $\Gamma \vdash \neg H_i$ нельзя: придётся устранять аксиомы *последовательно*, а не одним махом.

Последовательное устранение возможно благодаря следующему наблюдению: список $H_1, \dots, H_m$ всегда можно *упорядочить* так, чтобы константа аксиомы H_m была свежей не только для Γ, но и для всех остальных аксиом $H_1, \dots, H_{m-1}$. Это следует прямо из построения: константы вводятся по уровням $n = 0, 1, 2, \dots$, и внутри одного уровня — по разным экзистенциальным формулам, причём каждая константа $c_{n,k}$ используется только в *своей* аксиоме Хенкина и никогда не входит в формулы, на основе которых вводились более ранние константы. Достаточно упорядочить $H_1, \dots, H_m$ по неубыванию уровня их констант (а внутри уровня — произвольно).

Положим $\Sigma_0 = \Gamma$ и $\Sigma_j = \Gamma \cup \{H_1, \dots, H_j\}$ для $j = 1, \dots, m$. По построению константа аксиомы H_j не входит в Σ_{j-1}. Применяя базовый шаг к паре (Σ_{j-1}, H_j), получаем: если $\Sigma_{j-1} \cup \{H_j\} = \Sigma_j$ противоречиво, то противоречиво и Σ_{j-1}. Применяя это рассуждение последовательно для $j = m, m-1, \dots, 1$ («снимая» аксиомы с конца списка), заключаем: если $\Sigma_m = \Gamma \cup \{H_1, \dots, H_m\}$ противоречиво, то противоречиво и $\Sigma_0 = \Gamma$.

Таким образом, если $\Gamma \cup H \ \vdash \ \bot$, то $\Gamma \ \vdash \ \bot$ — вопреки предположению о непротиворечивости Γ. Значит $\Gamma \cup H \ = \ \Gamma^*$ непротиворечиво. Аксиома Хенкина физически может участвовать в дереве вывода противоречия, но, как показывает базовый шаг, применённый по одной аксиоме за раз, она структурно всегда устранима: противоречие, в котором она использована, сворачивается в более короткое противоречие, в конце концов получаемое из Γ напрямую. $\square$

4. Лемма Линденбаума: пополнение до полного множества

Определение 9. Множество предложений $\Delta \subseteq \mathcal{L}^0_\omega$ называется *полным непротиворечивым* (ПН-множеством), если:

(i) Δ непротиворечиво;

(ii) для каждого $\varphi \in \mathcal{L}^0_\omega$ ровно одно из φ, $\neg\varphi$ принадлежит Δ.

Лемма 10 (Линденбаум)**.** *Каждое непротиворечивое* $\Gamma^* \subseteq \mathcal{L}^0_\omega$ *можно расширить до ПН-множества* $\Delta \supseteq \Gamma^*$.

Доказательство. Язык $\mathcal{L}_\omega$ счётен (объединение счётной цепочки счётных языков), поэтому все предложения $\mathcal{L}^0_\omega$ можно перечислить: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$

Строим возрастающую цепочку:

$$\Gamma_0 = \Gamma^*, \qquad \Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{если } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ непротиворечиво,} \\ \Gamma_n & \text{иначе.} \end{cases}$$

Каждый шаг корректен. По закону исключённого третьего либо $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво, либо нет — третьего не дано. (Заметим: здесь мы не требуем *разрешимости* проверки непротиворечивости — достаточно её *существования* как дихотомии.)

Полагаем $\Delta = \bigcup_n \Gamma_n$.

Δ **непротиворечиво.** Пусть $\Delta \vdash \bot$. Тогда этот вывод конечен и использует лишь формулы из некоторого Γ_N — противоречие.

Δ **полно.** Пусть $\varphi = \varphi_n$. Если $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ непротиворечиво, то $\varphi_n \in \Gamma_{n+1} \subseteq \Delta$. Иначе $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \vdash \bot$, значит $\Gamma_n \vdash \neg\varphi_n$, откуда $\neg\varphi_n \in \Delta$. Таким образом Δ содержит ровно одно из $\varphi_n, \neg\varphi_n$. □

Замечание 11. В счётном случае конструкция полностью явная (никакого трансфинита и никакой аксиомы выбора). Для несчётных языков потребовалась бы лемма Цорна, но мы её не используем.

Замечание 12 (Неконструктивность Δ и множественность моделей)**.** Объект Δ существует в силу классических принципов (ЗИТ и счётной итерации), но в общем случае *неэффективен*: мы не можем алгоритмически определить, какие именно формулы в него вошли, если только они не выводимы из Γ^* явно. На каждом шаге мы делаем неконструктивный выбор между φ_n и $\neg\varphi_n$ — существование такого выбора гарантировано ЗИТ, но конкретный исход нам недоступен.

Следствием этого является то, что разные «достройки» Γ до ПН-множества дают в общем случае *неизоморфные* модели. Именно поэтому непротиворечивая теория как правило имеет много различных моделей. Это не дефект конструкции, а отражение реальности: теорема Гёделя о полноте доказывает *существование* модели, а не её единственность или конструктивную предъявимость.

5. Построение термовой модели

Далее Δ — фиксированное ПН-множество, содержащее Γ^*.

5.1. Носитель

Пусть T — множество всех *замкнутых термов* языка $\mathcal{L}_\omega$ (термов без свободных переменных). Вводим на T отношение:

$$s \sim t \;\overset{\text{def}}{\iff}\; (s = t) \in \Delta.$$

Лемма 13. *$\sim$ является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Рефлексивность: $(t = t) \in \Delta$, так как $\vdash t = t$. Симметричность и транзитивность аналогично следуют из того, что Δ содержит все аксиомы равенства. $\square$

Носитель модели:

$$M \;=\; T/{\sim}, \qquad [t] = \{s \in T : s \sim t\}.$$

5.2. Природа термовой модели

Ключевое наблюдение: носитель $M = T/{\sim}$ состоит из *термов*, а не из каких-то абстрактных объектов. Поэтому интерпретация символов языка — это не «вычисление в заранее данной структуре», а *определение по синтаксису*.

Иными словами: мы не знаем и не обязаны знать, «что такое» константа Хенкина $c_{n,k}$ как объект. Она *есть* элемент модели $[c_{n,k}]$ по определению. Вопрос «выполнено ли $P(c_{n,k})$?» имеет ответ: «да, если $P(c_{n,k}) \in \Delta$; нет, если $\neg P(c_{n,k}) \in \Delta$» — и ровно один из этих вариантов реализован, поскольку Δ полно. Никакого дополнительного «знания» о $c_{n,k}$ не требуется и не предполагается.

Аналогично, значение функции $f^{\mathfrak{M}}([t_1], \ldots, [t_r])$ — это просто класс терма $[f(t_1, \ldots, t_r)]$, то есть применение функционального символа на уровне синтаксиса термов. Семантика полностью редуцирована к синтаксису через принадлежность Δ.

5.3. Интерпретация символов

Прежде чем задавать интерпретацию, нужно зафиксировать, что лежит в основании формальной системы: мы предполагаем, что исчисление предикатов с равенством включает (помимо рефлексивности, симметричности и транзитивности) *схему аксиом конгруэнтности* для каждого функционального символа f_j арности r и каждого предикатного символа P_i арности r:

$$\forall \vec{x}\, \forall \vec{y}\, \Big(\textstyle\bigwedge_{i=1}^{r} x_i = y_i \;\to\; f_j(\vec{x}) = f_j(\vec{y}) \Big),$$

$$\forall \vec{x}\, \forall \vec{y}\, \Big(\textstyle\bigwedge_{i=1}^{r} x_i = y_i \;\to\; (P_i(\vec{x}) \leftrightarrow P_i(\vec{y})) \Big).$$

Это стандартное предположение (Эндертон, Mendelson и др.): без него равенство было бы лишь произвольным отношением эквивалентности, не согласованным с остальной сигнатурой, и определения ниже были бы некорректны. Поскольку эти аксиомы логические, они выводимы из пустого множества посылок, а значит входят в Δ (как и в любое полное непротиворечивое множество, содержащее все теоремы исчисления).

- **Константы.** $a_l^{\mathfrak{M}} = [a_l]$ для каждой константы $a_l \in \mathcal{L}$ (а также для констант Хенкина $c_{n,k}$).

- **Функциональные символы.**

$$f_j^{\mathfrak{M}}([t_1], \ldots, [t_r]) \;:=\; [f_j(t_1, \ldots, t_r)].$$

- **Предикатные символы.**

$$P_i^{\mathfrak{M}}([t_1], \ldots, [t_r]) = \top \iff P_i(t_1, \ldots, t_r) \in \Delta.$$

Лемма 14 (корректность определений)**.** *Оба определения не зависят от выбора представителей классов эквивалентности.*

Доказательство. Пусть $s_i \sim t_i$ для всех $i = 1, \ldots, r$, то есть $(s_i = t_i) \in \Delta$.

Функции. Аксиома конгруэнтности для f_j есть логическая теорема, значит лежит в Δ. Применяя её (через схему общности и modus ponens, используя $(s_i = t_i) \in \Delta$ для каждого i), получаем $\big(f_j(s_1, \ldots, s_r) = f_j(t_1, \ldots, t_r)\big) \in \Delta$, то есть $f_j(s_1, \ldots, s_r) \sim f_j(t_1, \ldots, t_r)$, а значит $[f_j(s_1, \ldots, s_r)] = [f_j(t_1, \ldots, t_r)]$.

Предикаты. Аналогично, из аксиомы конгруэнтности для P_i и $(s_i = t_i) \in \Delta$ получаем $\big(P_i(s_1, \ldots, s_r) \leftrightarrow P_i(t_1, \ldots, t_r)\big) \in \Delta$. Поскольку Δ полно и замкнуто относительно вывода, отсюда следует $P_i(s_1, \ldots, s_r) \in \Delta \iff P_i(t_1, \ldots, t_r) \in \Delta$, то есть значение $P_i^{\mathfrak{M}}$ действительно не зависит от выбора представителей. □

Замечание 15. Это не «теоретико-множественная магия» — корректность существенно использует то, что аксиомы конгруэнтности явно входят в логический базис исчисления предикатов с равенством. Если бы равенство было произвольным конгруэнтным отношением, заданным без этой схемы аксиом, определения $f^{\mathfrak{M}}$ и $P^{\mathfrak{M}}$ нуждались бы в отдельном обосновании или попросту были бы некорректны.

6. Лемма об истинности

Лемма 16 (об истинности)**.** *Для каждого замкнутого $\varphi \in \mathcal{L}_\omega^0$:*

$$\mathfrak{M} \vDash \varphi \iff \varphi \in \Delta.$$

Доказательство. Индукция по сложности φ.

Атомный случай $\varphi = P_i(t_1, \ldots, t_r)$**.** По определению $P_i^{\mathfrak{M}}$: $\mathfrak{M} \vDash P_i(t_1, \ldots, t_r) \iff P_i(t_1, \ldots, t_r) \in \Delta$.

Случай $\varphi = \neg\psi$**.** По полноте Δ: $\neg\psi \in \Delta \iff \psi \notin \Delta$. По индукционному предположению: $\psi \notin \Delta \iff \mathfrak{M} \nvDash \psi$. Итого: $\neg\psi \in \Delta \iff \mathfrak{M} \vDash \neg\psi$. ✓

Случай $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$**.** $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Delta$ iff $\psi_1 \in \Delta$ и $\psi_2 \in \Delta$ (так как Δ замкнуто относительно вывода в обе стороны и содержит аксиомы для конъюнкции), что по индукции равносильно $\mathfrak{M} \vDash \psi_1 \wedge \psi_2$. ✓

Ключевой случай $\varphi = \exists x\, \psi(x)$**.**

($\Rightarrow$) Пусть $\mathfrak{M} \vDash \exists x\, \psi(x)$. Тогда существует $[t] \in M$ такой, что $\mathfrak{M} \vDash \psi(t)$. По индукции $\psi(t) \in \Delta$, откуда $\vdash \exists x\, \psi(x)$, следовательно $\exists x\, \psi(x) \in \Delta$.

($\Leftarrow$) Пусть $\exists x\, \psi(x) \in \Delta$. По построению существует аксиома Хенкина $\exists x\, \psi(x) \to \psi(c)$, которая лежит в $\Gamma^* \subseteq \Delta$. Modus ponens: $\psi(c) \in \Delta$. По индукционному предположению $\mathfrak{M} \vDash \psi(c)$, а значит $\mathfrak{M} \vDash \exists x\, \psi(x)$. ✓ □

7. Завершение доказательства

Перед тем как завершить доказательство, нам понадобится общий факт о структурах: истинность формулы зависит только от интерпретации тех символов, которые в неё реально входят, а не от всей сигнатуры языка, в котором структура задана.

Лемма 17 (о совпадении интерпретаций)**.** *Пусть $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}''$ — языки (сигнатура $\mathcal{L}'$ является частью сигнатуры $\mathcal{L}''$), и пусть $\mathfrak{M}'' = \langle M, I'' \rangle$ — $\mathcal{L}''$-структура, где I'' — её функция интерпретации символов. Определим* редукт *(обеднение) $\mathfrak{M}''$ до сигнатуры $\mathcal{L}'$ как*

$$\mathfrak{M}''|_{\mathcal{L}'} = \langle M, I' \rangle, \qquad \text{где } I' = I''\big|_{\text{символы } \mathcal{L}'}$$

(тот же носитель M, а интерпретация I' — это сужение I'' только на символы $\mathcal{L}'$; интерпретации символов из $\mathcal{L}'' \setminus \mathcal{L}'$ просто отбрасываются).

Тогда для любой формулы φ языка $\mathcal{L}'$ (то есть не содержащей символов вне $\mathcal{L}'$):

$$\mathfrak{M}'' \vDash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{M}''|_{\mathcal{L}'} \vDash \varphi.$$

Доказательство. Индукция по построению формулы φ. На атомном шаге φ имеет вид $P(t_1, \ldots, t_r)$ или $s = t$ для символов P и термов из $\mathcal{L}'$; истинность вычисляется через $I''(P)$ либо через $I'(P) = I''(P)$ — одно и то же отношение, поскольку $P \in \mathcal{L}'$. Аналогично для термов: значение $t^{\mathfrak{M}''}$ и $t^{\mathfrak{M}''|_{\mathcal{L}'}}$ совпадают, так как все функциональные символы и константы, входящие в t, лежат в $\mathcal{L}'$ и потому интерпретируются одинаково в I'' и в I'. Шаги индукции для $\neg, \wedge, \exists$ дословно переносят определение истинности с $\mathfrak{M}''$ на $\mathfrak{M}''|_{\mathcal{L}'}$ и обратно, поскольку само определение истинности на этих связках не упоминает сигнатуру явно. □

Замечание 18. Содержательно: ограничение сигнатуры — чисто структурная операция отсечения неиспользуемых интерпретаций, не меняющая ни носитель M, ни поведение структуры на формулах, которые эти отброшенные символы не используют.

Доказательство леммы 2. Пусть $\Gamma \subseteq \mathcal{L}^0$ непротиворечиво.

Шаг 1. Расширение языка. Строим цепочку $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \cdots$ и $\mathcal{L}_\omega = \bigcup_n \mathcal{L}_n$ с константами Хенкина, формируем $\Gamma^* = \Gamma \cup H$. По лемме 7 Γ^* непротиворечиво.

Шаг 2. Пополнение по Линденбауму. По лемме 10 расширяем Γ^* до ПН-множества $\Delta \subseteq \mathcal{L}_\omega^0$.

Шаг 3. Термовая модель. Строим $\mathcal{L}_\omega$-структуру $\mathfrak{M}$ с носителем $T/{\sim}$ и интерпретацией символов, как описано в разделе 5.

Шаг 4. Применение леммы об истинности. По лемме 16 для каждого $\varphi \in \Delta$ имеем $\mathfrak{M} \vDash \varphi$. Поскольку $\Gamma \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$, получаем $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$.

Шаг 5. Редукт на исходный язык. Применим лемму 17 к языкам $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_\omega$ и структуре $\mathfrak{M}$:

(a) исходная теория Γ сформулирована в языке $\mathcal{L}$;

(b) мы построили расширенный язык $\mathcal{L}_\omega \supseteq \mathcal{L}$, добавив константы Хенкина;

(c) термовая структура $\mathfrak{M}$ задана в языке $\mathcal{L}_\omega$, и по предыдущему шагу $\mathfrak{M} \models \Gamma$;

(d) все формулы Γ записаны в языке $\mathcal{L}$ (в них нет ни одной константы Хенкина), поэтому возьмём редукт $\mathfrak{M}|_{\mathcal{L}}$ — ту же структуру с носителем M, но с забытой интерпретацией символов $c_{n,k}$;

(e) по лемме 17, применённой к каждой формуле $\varphi \in \Gamma$, получаем $\mathfrak{M}|_{\mathcal{L}} \models \Gamma$.

□

Следствие 19 (Теорема Гёделя о полноте)**.** $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$.

Доказательство. Если $\Gamma \nvdash \varphi$, то $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ непротиворечиво. По лемме 2 существует модель $\mathfrak{M}$ такая, что $\mathfrak{M} \models \Gamma$ и $\mathfrak{M} \models \neg\varphi$, то есть $\mathfrak{M} \not\models \varphi$. Следовательно $\Gamma \not\models \varphi$. □

8. Пример: теорема Акса–Гротендика

Одно из наиболее эффектных применений теории моделей — доказательство следующего факта, принадлежащего алгебраической геометрии.

Теорема 20 (Акс–Гротендик)**.** *Любое инъективное полиномиальное отображение $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ является сюръективным.*

Примечательно, что для самого доказательства не требуется ни топологии, ни анализа, ни никакого явного построения прообраза — только теория моделей.

Доказательство (Акс, 1968). **Шаг 1: формализация.** Утверждение «каждое инъективное полиномиальное отображение $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ сюръективно» для фиксированной размерности n и фиксированных степеней полиномов $(d_1, \dots, d_n)$ выражается одной формулой первого порядка в языке колец:

$$\sigma_{n,\vec{d}} \;\equiv\; \forall \vec{a}\; \Big[\big(\forall \vec{x}\, \forall \vec{y}\; (f_{\vec{a}}(\vec{x}) = f_{\vec{a}}(\vec{y}) \to \vec{x} = \vec{y})\big) \to \forall \vec{z}\; \exists \vec{x}\; f_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{z}\Big],$$

где $f_{\vec{a}}$ обозначает отображение с набором коэффициентов $\vec{a}$. Полное утверждение теоремы для $\mathbb{C}$ есть $\mathbb{C} \models \sigma_{n,\vec{d}}$ для всех n и $\vec{d}$.

Шаг 2: случай конечных полей. Если $\mathbb{F}$ конечно, то $\mathbb{F}^n$ конечно. Инъекция конечного множества в себя сюръективна по соображениям мощности. Следовательно, $\mathbb{F} \models \sigma_{n,\vec{d}}$ для любого конечного поля $\mathbb{F}$ и любых $n, \vec{d}$.

Шаг 3: теория ACF_0 **и признак Вота.** Напомним, что теория *алгебраически замкнутых полей нулевой характеристики* (ACF_0) описывается аксиомами алгебраически замкнутого поля вместе со схемой аксиом $\neg(1 + \cdots + 1) = 0$ (по одной на каждое простое p). Эта теория *полна*: по *признаку Вота* теория счётной сигнатуры, не имеющая конечных моделей и κ-категоричная для некоторого бесконечного κ, полна. ACF_0 категорична в любой несчётной мощности (все алгебраически замкнутые поля нулевой характеристики одной несчётной мощности изоморфны), откуда полнота.

В частности, $\mathbb{C}$ — единственная (с точностью до изоморфизма) несчётная модель ACF_0 мощности $2^{\aleph_0}$, и $\mathrm{ACF}_0 \models \varphi$ равносильно $\mathbb{C} \models \varphi$ для любого предложения φ.

Шаг 4: перенос через теорему компактности. Пусть дано конкретное $\sigma_{n,\vec{d}}$.

Предположим, что $\mathbb{C} \not\models \sigma_{n,\vec{d}}$. Поскольку ACF_0 полна и $\mathbb{C} \models \mathrm{ACF}_0$, это означало бы $\mathrm{ACF}_0 \models \neg\sigma_{n,\vec{d}}$. По теореме о полноте (теорема 1) существует формальный вывод $\mathrm{ACF}_0 \vdash \neg\sigma_{n,\vec{d}}$. Этот вывод конечен, поэтому использует лишь конечное число аксиом ACF_0 — в частности, лишь конечное число аксиом $\neg p \cdot 1 = 0$, скажем, для простых $p \leq p_0$.

Значит, $\neg\sigma_{n,\vec{d}}$ выводима уже из

$$\mathrm{ACF}_{>p_0} \;:=\; \mathrm{ACF} \,\cup\, \{\neg p \cdot 1 = 0 : p \leq p_0\},$$

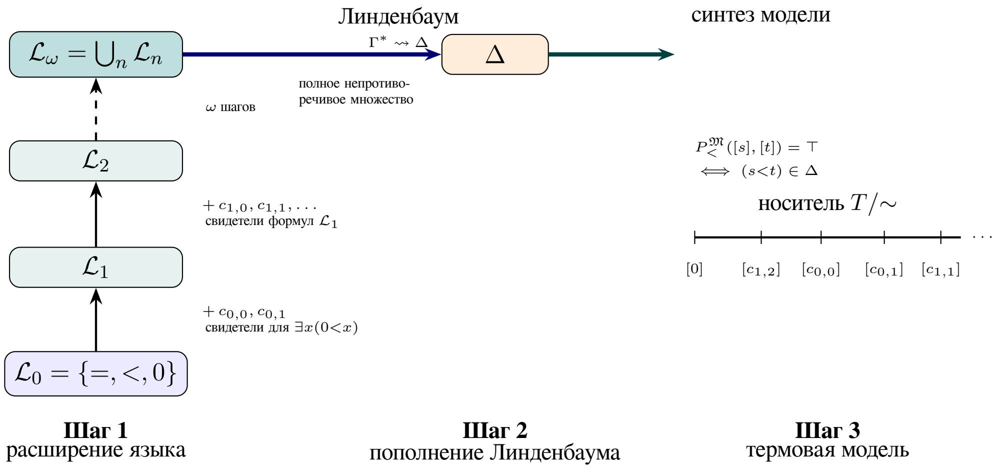
и потому $\mathrm{ACF}_{>p_0} \models \neg\sigma_{n,\vec{d}}$. Но для любого простого $p > p_0$ алгебраическое замыкание $\overline{\mathbb{F}_p}$ является моделью $\mathrm{ACF}_{>p_0}$, а значит $\overline{\mathbb{F}_p} \models \neg\sigma_{n,\vec{d}}$. При этом $\overline{\mathbb{F}_p}$ содержит конечные подполя $\mathbb{F}_{p^k}$, и ограничение рассуждения Шага 2 даёт $\overline{\mathbb{F}_p} \models \sigma_{n,\vec{d}}$ — противоречие.

Следовательно, $\mathbb{C} \models \sigma_{n,\vec{d}}$. □

Замечание 21 (методологическое значение)**.** Доказательство показывает принципиальную черту модельно-теоретического метода: из полноты ACF_0 и теоремы о полноте заключаем, что существует чисто алгебраический формальный вывод теоремы Акса–Гротендика из аксиом теории колец, хотя этот вывод нигде не предъявляется и на практике был бы чрезвычайно сложен. Таким образом, модельная теория устанавливает *существование* доказательства, не строя его явно — и именно поэтому такой метод называют *перефразированием* или *переносом*: факт, доступный в одном классе структур, переносится в другой через семантическое посредство.

Иллюстрация: ход конструкции на сквозном примере

Следующая схема собирает воедино три шага конструкции для языка $\mathcal{L} = \{=, <, 0\}$ из раздела 7: рост языка по уровням, переход к полному непротиворечивому множеству и итоговый носитель термовой модели с уже проявившимся в нём порядком.



Резюме конструкции

Шаг	Что делаем
1	Расширяем язык: добавляем константы Хенкина $c_{n,k}$ итеративно (с реестром свидетелей, замечание 4)
2	Пополняем Γ аксиомами Хенкина — получаем Γ^*, непротиворечивое по лемме 7
3	Алгоритмом Линденбаума строим ПН-множество $\Delta \supseteq \Gamma^*$
4	Носитель модели — классы эквивалентности замкнутых термов $\mathcal{L}_\omega$
5	Предикаты и функции задаём через Δ; корректность даёт лемма 14 (аксиомы конгруэнтности)
6	Лемма об истинности (индукция по сложности) даёт $\mathfrak{M} \vDash \Delta$
7	Редукт $\mathfrak{M}|_{\mathcal{L}}$ (лемма 17) является моделью исходного Γ