Исчисление предикатов первого порядка: финитарный синтаксис, вывод и модели

Н. И. Казимиров

2026

Продолжение заметки «Финитарная база формальных систем и строгое построение исчисления высказываний с его моделями» (PDF).

Содержание

Введение **1**

1 Синтаксис языка первого порядка **4**
1.1 Алфавит, переменные, шаблоны и сигнатуры 4
1.2 Термы, релевантные списки и формулы сигнатуры 7
1.3 Перевод формального канона во внутреннее представление прувера Lean 14

2 Исчисление предикатов **16**
2.1 Язык первого порядка 16
2.2 Аксиомы и правила вывода 18
2.3 Выводимость в контексте списка гипотез 21
2.4 Теории первого порядка 26
2.5 Дефинициальные расширения языка и теорий 29

3 Семантика и модели **35**
3.1 Структуры и истинность по Тарскому 35
3.2 Корректность и полнота 37
3.3 Исчисление высказываний как фрагмент исчисления предикатов . . . 38

Заключение. Постулат бинарности и спираль метатеорий **41**

Литература **46**

Введение

Настоящий текст продолжает статью «Финитарная база формальных систем и строгое построение исчисления высказываний с его моделями» (далее — **ИВ**) и строит

исчисление предикатов первого порядка (**ИП**) на той же финитарной основе. Специальный метаязык, введенный в части I статьи ИВ, используется без изменений: его предметная область исчерпывается конечными словами фиксированного алфавита, базовыми операциями и отношениями над ними (конкатенацией, тождеством, вхождением и пословной заменой) и рекурсивным порождением классов слов и отношений между словами, без обращения к бесконечным совокупностям и натуральным числам.

Построение языка первого порядка строго в этих границах требует решения двух синтаксических задач, которых не возникало в исчислении высказываний.

Первая задача связана с понятием сигнатуры и арности. В отличие от исчисления высказываний, язык которого имеет единый фиксированный словарь, синтаксис логики первого порядка параметризуется набором нелогических символов — констант, функциональных символов и предикатных символов. В теоретико-множественном изложении каждому функциональному и предикатному символу сопоставляется натуральное число — его арность (число аргументов), а правила образования термов и атомарных формул записываются со списками аргументов переменной длины.

Поскольку в исходном специальном языке натуральные числа как отдельный класс не заданы, функциональные и предикатные основы порождаются рекурсивно над фиксированным конечным алфавитом тем же способом, что и переменные, а числовая функция арности заменяется чисто строковой конструкцией: к головному имени приписывается цепочка специальных подстановочных мест (слотов) в скобках, разделенных запятыми. Тем самым функциональные шаблоны (с подстановочными местами) образуются из функциональных основ приписыванием цепочки мест, тогда как сами функциональные основы без приписанных мест одновременно играют роль констант, реализуя представление констант как 0-арных функций; аналогично, предикатные шаблоны образуются из предикатных основ приписыванием цепочки мест.

Все функциональные основы (константы), функциональные и предикатные шаблоны произвольного числа мест образуют рекурсивно порождаемые разрешимые классы слов, а сигнатура задается на метауровне как выборка из этих классов, обладающая свойством антицепи: для каждого головного имени в сигнатуру входит не более одного слова. Чтобы подставлять аргументы в функциональный или предикатный шаблон сразу списком и при этом соблюсти число аргументных мест без пересчета, списки термов через запятую порождаются совместной рекурсией синхронно с цепочками подстановочных мест. Список термов, порожденный в паре с цепочкой мест данного шаблона, согласован с ним по длине (релевантен ему), а образование составного терма или атомарной формулы сводится к приписыванию релевантного списка термов к головному имени шаблона.

Средств специального языка (конечного алфавита, операций над словами, структурной рекурсии и индукции) в принципе достаточно для построения самих натуральных чисел как отдельного класса слов — как в унарной записи (цепочки одного символа), так и в позиционной записи с цифрами и арифметическими операциями (по выразительной силе такой метаязык отвечает примитивно-рекурсивной арифметике). Фактически цепочки переменных и цепочки подстановочных мест уже представляют собой унарную реализацию натуральных чисел, а совместная рекурсия для релевантных списков реализует проверку совпадения их длин. Встраивание унарного счетчика непосредственно в позиционные шаблоны позволяет обойтись без отдельного класса цифровых записей чисел и вспомогательной арифметики цифр до построения синтаксиса исчисления, при сохранении строго конечного объектного алфавита; после доказательства однозначности разбора (§ 1.2) числовая запись арностей и индексов

вводится в § 2.1 как сокращение этого канона.

Вторая задача связана с подстановкой термов и действием кванторов. Если использовать один и тот же запас индивидных переменных как на свободных местах в термах, так и под кванторами, то пословная замена из части I статьи ИВ перестает быть корректной операцией над формулами: она затрагивает связанные вхождения заменяемой переменной, а переменные внутри подставляемого терма могут попадать в область действия кванторов.

Чтобы сохранить базовую пословную замену без введения сложных вспомогательных предикатов допустимости подстановки и переименования переменных, индивидные переменные уже на уровне алфавита разделяются на два непересекающихся класса — свободные и связанные, причем пропозициональные переменные исчисления высказываний образуют третий, не пересекающийся с ними класс. Термы строятся исключительно из свободных переменных и констант, тогда как связанные переменные вводятся только правилом навешивания квантора: в готовой формуле все вхождения выбранной свободной переменной заменяются на связанную переменную, еще не входящую в эту формулу. В результате ни один терм не содержит связанных переменных, захват переменных кванторами при подстановке терма невозможен синтаксически, а условие отсутствия свободных вхождений переменной в формулу сводится к элементарному невхождению одного слова в другое. Кроме того, независимость пропозициональных переменных от словаря ИП позволяет получать пропозициональные аксиомы и тавтологии первого порядка прямой пословной подстановкой формул ИП вместо пропозициональных переменных в аксиомы и теоремы исчисления высказываний.

Изложение организовано следующим образом. Раздел 1 выдержан строго финитарно: в каноне специального языка определяются классы переменных, нелогических имен, позиционных шаблонов, понятие сигнатуры как антицепи, классы релевантных списков термов, термов и формул данной сигнатуры, устанавливается однозначность их синтаксического разбора, а также обсуждается аналогия построенного строкового канона с внутренним представлением ядра прувера Lean.

В разделе 2 осуществляется переход к более привычной теоретико-множественной записи (§ 2.1), задаются аксиомы, правила вывода и выводимость в контексте конечного списка гипотез, устанавливаются лемма о переименовании, теорема о дедукции и основные свойства выводимости. В § 2.4–2.5 поверх этого финитарного ядра выводов вводятся нефинитарные надстройки — произвольные множества формул, теории первого порядка и счетные цепи дефинициальных расширений (теорема об устранимости и консервативности). В разделе 3 средства стандартной теории множеств используются для построения семантики: вводятся структуры и истинность по Тарскому, доказывается корректность ИП, формулируется теорема Геделя о полноте (подробное доказательство которой вынесено в заметку «Конструкция Хенкина»), выводятся ее основные следствия (теорема компактности и нисходящая теорема Левенгейма–Сколема) и сопоставляются два представления исчисления высказываний средствами логики первого порядка — как бесквантворного фрагмента ИП без равенства и как теории булевых алгебр. В заключении прослеживается спираль метатеоретического восхождения от доформального постулата бинарности через безындукционное ядро ($\mathsf{TC} \equiv \mathsf{Q}$) и финитарно-арифметическую ступень индукции ($\mathsf{TC} + \mathrm{Ind} \equiv \mathsf{PA} \equiv \mathsf{HF}$ с финитарным минимумом $\mathsf{PRA} \equiv_{\Pi_2} I\Sigma_1$ и EA) к теоретико-множественной семантике (ZFC).

1. Синтаксис языка первого порядка

1.1. Алфавит, переменные, шаблоны и сигнатуры

В отличие от исчисления высказываний, язык которого имеет единый фиксированный алфавит, синтаксис логики первого порядка параметризуется выбором сигнатуры — набора констант, функциональных и предикатных шаблонов. Чтобы оставаться внутри финитарного специального языка части I статьи ИВ без обращения к натуральным числам, базовый объектный алфавит фиксируется раз и навсегда: в нем рекурсивно порождаются как все сорта переменных, так и функциональные и предикатные основы вместе с их позиционными шаблонами.

Фиксируется новый *объектный алфавит* $\mathbb{A}$, состоящий из 16 символов:

$$\mathsf{p}\quad \mathsf{a}\quad \mathsf{x}\quad \mathfrak{F}\quad \mathfrak{P}\quad _\quad (\quad)\quad ,\quad =\quad \neg\quad \wedge\quad \vee\quad \to\quad \forall\quad \exists$$

Все перечисленные символы попарно различны и не пересекаются с метасимволами специального языка. С переходом к алфавиту $\mathbb{A}$ понятие слова из ИВ меняет свой объем: далее под *словами* всюду понимаются конечные цепочки символов алфавита $\mathbb{A}$, и соответственно меняется область пробегания общих словесных метапеременных $\xi, \eta, \zeta, \theta, \tau, \omega$ из § I.1 статьи ИВ — теперь они пробегают все слова в алфавите $\mathbb{A}$. Базовые операции и отношения над словами (конкатенация, тождество $\equiv$, вхождение и пословная замена $\xi[\zeta/\eta]$) сохраняют определения § I.1 статьи ИВ, но действуют уже на словах алфавита $\mathbb{A}$; в частности, пустых слов нет.

Поскольку базовый 7-символьный алфавит исчисления высказываний (с символом p для пропозициональных переменных, без внешнего разделителя списков) содержится в $\mathbb{A}$, а правила порождения формул и теорем статьи ИВ остальных символов алфавита $\mathbb{A}$ не используют, классы пропозициональных переменных, формул, аксиом и теорем ИВ без изменений вложены в класс слов над $\mathbb{A}$; при этом расширение области пробегания метапеременных ξ, η, ζ на весь алфавит $\mathbb{A}$ позволяет подставлять в формулы ИВ произвольные слова нового языка посредством той же базовой операции замены $\xi[\zeta/\eta]$.

Запятая в алфавите $\mathbb{A}$ служит разделителем аргументных мест в шаблонах и термах, и благодаря беспрефиксности формул (лемма 1.7) и свойству редактора (§ I.1 статьи ИВ) тот же символ запятой внутри 16-символьного алфавита $\mathbb{A}$ (без его расширения) однозначно разделяет формулы во внешних списках гипотез и цепочках вывода (§ 2.3). Аргументные скобки метапредикатов по-прежнему выделяются синим цветом ($(\,)$), а составной аргумент предиката заключается в кавычки. Для компактной записи конкретных слов в изложении (на уровне естественного языка, поверх специального языка, не содержащего чисел) используется степенное сокращение подряд идущих повторений одного символа алфавита $\mathbb{A}$: a^2 вместо aa, a^3 вместо aaa, $\mathfrak{F}^2$ вместо $\mathfrak{F}\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}^3$ вместо $\mathfrak{F}\mathfrak{F}\mathfrak{F}$, $\mathfrak{P}^2$ вместо $\mathfrak{P}\mathfrak{P}$ и т. д. (объектным словом при этом остается развернутая цепочка символов без показателей степени).

Равенство как логический символ. Двуместный предикатный символ $=$ в сигнатуру не входит: он относится к логическим символам наравне со связками и кванторами, присутствует в языке всякой сигнатуры, а его аксиомы (рефлексивность и конгруэнтность, группа 3 определения 2.1) относятся к логическим аксиомам. В семантике (определение 3.2) символ $=$ всегда интерпретируется отношением тождества на носителе и потому, в отличие от элементов сигнатуры, свободной интерпретации

не подлежит. Если не оговорено противное, рассматривается *исчисление предикатов с равенством*. *Исчисление предикатов без равенства* получается удалением символа $=$ из используемого словаря формул, пункта о равенстве из правила **F1** определения 1.5 и группы 3 аксиом (при этом предполагается, что $\mathrm{Pred}_\Sigma \neq \emptyset$, иначе в языке отсутствуют атомарные, а следовательно и любые формулы); все результаты разделов 1–3, не касающиеся равенства, переносятся на него без изменений.

Определение 1.1 (Классы переменных, функциональных и предикатных основ)**.** Предикаты $\mathrm{PVar}(\xi)$ («пропозициональная переменная ИВ»), $\mathrm{FVar}(\xi)$ («свободная индивидная переменная ИП»), $\mathrm{BVar}(\xi)$ («связанная индивидная переменная ИП»), $\mathrm{FSym}(\xi)$ («функциональная основа») и $\mathrm{PSym}(\xi)$ («предикатная основа») задаются рекурсивно:

1. *Пропозициональные переменные* (PVar):
   - **P1.** *База:* $\mathrm{PVar}(\mathsf{'(p)'})$.
   - **P2.** *Правило:* если $\mathrm{PVar}(\mathsf{'(}\xi\mathsf{)'})$, то $\mathrm{PVar}(\mathsf{'(}\xi\mathsf{p)'})$.
   - **P3.** *Замыкание:* других пропозициональных переменных нет.
2. *Свободные индивидные переменные* (FVar):
   - **FV1.** *База:* $\mathrm{FVar}(\mathsf{'(a)'})$.
   - **FV2.** *Правило:* если $\mathrm{FVar}(\mathsf{'(}\xi\mathsf{)'})$, то $\mathrm{FVar}(\mathsf{'(}\xi\mathsf{a)'})$.
   - **FV3.** *Замыкание:* других свободных переменных нет.
3. *Связанные индивидные переменные* (BVar):
   - **BV1.** *База:* $\mathrm{BVar}(\mathsf{'(x)'})$.
   - **BV2.** *Правило:* если $\mathrm{BVar}(\mathsf{'(}\xi\mathsf{)'})$, то $\mathrm{BVar}(\mathsf{'(}\xi\mathsf{x)'})$.
   - **BV3.** *Замыкание:* других связанных переменных нет.
4. *Функциональные основы* (FSym):
   - **FS1.** *База:* $\mathrm{FSym}(\mathsf{'(}\mathfrak{F}\mathsf{)'})$.
   - **FS2.** *Правило:* если $\mathrm{FSym}(\mathsf{'(}\xi\mathsf{)'})$, то $\mathrm{FSym}(\mathsf{'(}\xi\mathfrak{F}\mathsf{)'})$.
   - **FS3.** *Замыкание:* других функциональных основ нет.
5. *Предикатные основы* (PSym):
   - **PS1.** *База:* $\mathrm{PSym}(\mathsf{'(}\mathfrak{P}\mathsf{)'})$.
   - **PS2.** *Правило:* если $\mathrm{PSym}(\mathsf{'(}\xi\mathsf{)'})$, то $\mathrm{PSym}(\mathsf{'(}\xi\mathfrak{P}\mathsf{)'})$.
   - **PS3.** *Замыкание:* других предикатных основ нет.

Индукцией по построению устанавливается, что всякое слово классов PVar, FVar, BVar, FSym и PSym имеет вид соответственно $(\mathsf{p}\ldots\mathsf{p})$, $(\mathsf{a}\ldots\mathsf{a})$, $(\mathsf{x}\ldots\mathsf{x})$, $(\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F})$ и $(\mathfrak{P}\ldots\mathfrak{P})$ с не менее чем одним вхождением базового символа. Поскольку символы $\mathsf{p}, \mathsf{a}, \mathsf{x}, \mathfrak{F}, \mathfrak{P}$ попарно различны, эти пять классов попарно не пересекаются. Кроме того, скобки (и) входят в каждое такое слово только первым и последним символом,

поэтому ни одно слово ни одного из пяти классов PVar, FVar, BVar, FSym, PSym не является собственным подсловом другого слова какого-либо из этих классов; тем самым пословная замена $\xi[\zeta/\eta]$ любого из таких слов действует чисто, не затрагивая остальные. Слова класса FSym служат одновременно головными именами функциональных шаблонов и константами (реализуя представление констант как 0-арных функций), тогда как слова класса PSym используются только в качестве головных имен предикатных шаблонов.

После определения этих классов за ними закрепляются ограниченные метапеременные:

- за классом PVar — строчные латинские буквы p, q, r (как в статье ИВ);
- за классом FVar — строчные латинские буквы начала алфавита a, b, c, d;
- за классом BVar — строчные латинские буквы конца алфавита x, y, z, u, v, w;
- за классом FSym — прописные латинские буквы C, D.

Далее средствами специального языка на основе классов FSym и PSym определяются классы функциональных и предикатных шаблонов.

Определение 1.2 (Функциональные и предикатные шаблоны)**.** Классы FTpl («функциональный шаблон») и PTpl («предикатный шаблон») задаются рекурсивно:

1. *Функциональные шаблоны* (FTpl):

FT1. *База:* FTpl('$C(␣)$').

FT2. *Правило:* если FTpl('$C(\xi)$'), то FTpl('$C(\xi, ␣)$').

FT3. *Замыкание:* других функциональных шаблонов нет.

2. *Предикатные шаблоны* (PTpl):

PT1. *База:* если PSym(η), то PTpl('$\eta(␣)$').

PT2. *Правило:* если PSym(η) и PTpl('$\eta(\xi)$'), то PTpl('$\eta(\xi, ␣)$').

PT3. *Замыкание:* других предикатных шаблонов нет.

Индукцией по построению устанавливается, что класс функциональных шаблонов FTpl состоит из слов вида $(\mathfrak{F}\dots\mathfrak{F})(␣, \dots, ␣)$ (одно или несколько подстановочных мест $␣$, разделенных запятыми внутри второй пары скобок), например $(\mathfrak{F})(␣)$, $(\mathfrak{F})(␣, ␣)$, $(\mathfrak{F}^2)(␣, ␣, ␣)$, а класс предикатных шаблонов PTpl — из слов вида $(\mathfrak{P}\dots\mathfrak{P})(␣, \dots, ␣)$, например $(\mathfrak{P})(␣)$, $(\mathfrak{P}^2)(␣, ␣)$.

Для вновь заданных классов FTpl и PTpl закрепляются соответствующие ограниченные метапеременные:

- за классом FTpl — прописные латинские буквы F, G, H (так что каждая из них обозначает функциональный шаблон вида $C\xi$ уже вместе с цепочкой подстановочных мест в скобках);
- за классом PTpl — прописные латинские буквы P, Q (обозначающие предикатный шаблон вида $\eta\xi$ уже вместе с цепочкой подстановочных мест в скобках).

Классы FTpl и PTpl разрешимы: для проверки принадлежности слова классу FTpl (или PTpl) достаточно отделить начальное слово класса FSym (соответственно PSym), которое однозначно восстанавливается по первой паре символов и позиции первой закрывающей скобки, и убедиться, что остающаяся часть представляет собой цепочку чередующихся символов $␣$ и запятой внутри пары скобок $($ и $)$.

Всякое слово классов FSym, FTpl и PTpl начинается с единственного слова класса FSym или PSym — его *головного имени*: как для функциональной основы (константы) C, так и для функционального шаблона $C\xi$ головным именем служит функциональная основа C (построенная из $\mathfrak{F}$), тогда как для предикатного шаблона $\eta\xi$ головным именем служит предикатная основа η (построенная из $\mathfrak{P}$). При этом функциональная основа C без приписанных мест выступает как 0-арный функциональный шаблон (константа).

Определение 1.3 (Сигнатура)**.** *Сигнатурой* Σ называется подкласс (выборка) слов из классов FSym, FTpl и PTpl, обладающий *свойством антицепи*: никакие два различных слова сигнатуры Σ не имеют общего головного имени (тем самым для каждой функциональной основы C в сигнатуру Σ входит либо сама основа C в роли константы, либо не более одного функционального шаблона вида $C\xi$, а для каждой предикатной основы η — не более одного предикатного шаблона вида $\eta\xi$). Принадлежность слова η сигнатуре Σ записывается предикатом $\Sigma(\eta)$.

Выбор сигнатуры осуществляется на метауровне и не требует введения нового синтаксического разделителя или специального класса сигнатур: в частности, допускается и пустая сигнатура (чистый язык равенства), и конечная выборка слов, и (в разделе 3, где снимаются финитарные ограничения) бесконечная антицепь из слов классов FSym, FTpl и PTpl. Для конечной (или разрешимой) выборки Σ проверка предиката $\Sigma(\eta)$ завершается за конечное число шагов, что и обеспечивает разрешимость языка в разделах 1–2. Свойство антицепи гарантирует, что для любого головного имени C (или предикатной основы η), встречающегося в сигнатуре Σ, в Σ входит ровно одно слово с этим головным именем: например, в одной сигнатуре не могут одновременно содержаться константа C и функциональный шаблон $C(␣)$, два функциональных шаблона $C(␣)$ и $C(␣,␣)$ или предикатные шаблоны $\eta(␣)$ и $\eta(␣,␣)$. Схема взаимного расположения базовых синтаксических классов в алфавите $\mathbb{A}$ и антицепи сигнатуры Σ изображена на рис. 1.

1.2. Термы, релевантные списки и формулы сигнатуры

Пусть далее фиксирована сигнатура Σ (в смысле определения 1.3). Слова языка этой сигнатуры делятся на два основных синтаксических класса: *термы*, обозначающие объекты предметной области, и *формулы*, выражающие утверждения об этих объектах. Чтобы подставлять аргументы в функциональные и предикатные шаблоны сразу списком и согласовывать его длину с цепочкой подстановочных мест без использования чисел, списки термов порождаются совместной рекурсией с цепочками подстановочных мест.

Определение 1.4 (Термы и релевантные списки термов)**.** Предикат $\mathrm{Term}_\Sigma(\xi)$ («слово ξ есть терм сигнатуры Σ») и отношение $\mathrm{Rel}_\Sigma(\tau;\xi)$ («список термов τ релевантен цепочке мест ξ») задаются совместной рекурсией:

Tm1. *База термов:* $\mathrm{Term}_\Sigma(a)$; если $\Sigma(C)$, то $\mathrm{Term}_\Sigma(C)$.

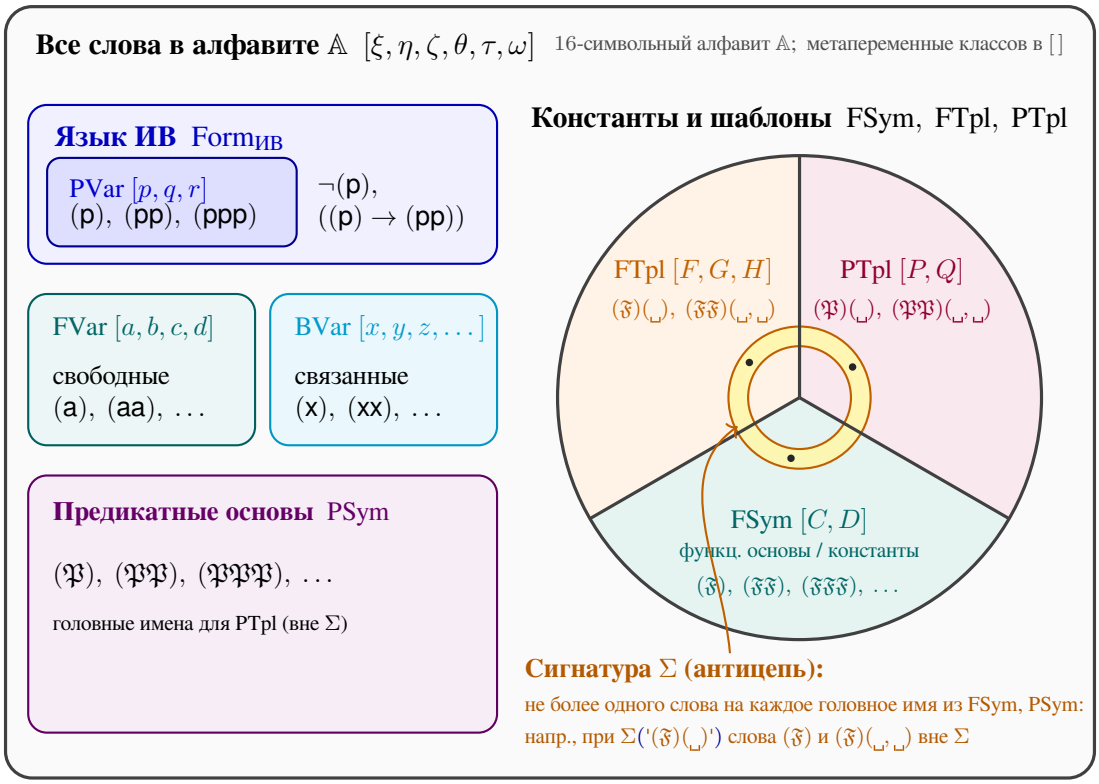


Рис. 1: Вложенность базовых синтаксических классов в алфавите $\mathbb{A}$: пропозициональный фрагмент (PVar внутри $\mathrm{Form}_{\text{ИВ}}$), переменные (FVar, BVar), предикатные основы (PSym), трехсекторная область констант и шаблонов (FSym, FTpl, PTpl, где функциональные основы FSym выступают и как константы) и сигнатура Σ (антицепь).

Tm2. *Одноэлементный список термов:* если $\mathrm{Term}_\Sigma(\eta)$, то $\mathrm{Rel}_\Sigma(\text{'}(\eta)\text{'}\,;\,\text{'}(\␣)\text{'})$.

Tm3. *Присоединение терма к списку:* если $\mathrm{Term}_\Sigma(\eta)$ и $\mathrm{Rel}_\Sigma(\text{'}(\tau)\text{'}\,;\,\text{'}(\xi)\text{'})$, то $\mathrm{Rel}_\Sigma(\text{'}(\eta, \tau)\text{'}\,;\,\text{'}(\␣, \xi)\text{'})$.

Tm4. *Применение функционального шаблона:* если $\Sigma(\text{'}C\xi\text{'})$ и $\mathrm{Rel}_\Sigma(\tau\,;\,\xi)$, то $\mathrm{Term}_\Sigma(\text{'}C\tau\text{'})$.

Tm5. *Замыкание:* других термов и пар отношения Rel_Σ нет.

За классом Term_Σ закрепляются ограниченные метапеременные T, R.

Индукцией по построению (правила **Tm1**–**Tm4**) устанавливается общий вид слов класса Term_Σ: всякий терм сигнатуры Σ есть либо свободная переменная вида $(\mathsf{a}\ldots\mathsf{a})$, либо константа вида $(\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F})$ из сигнатуры Σ, либо составной терм вида $(\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F})(T_1, \ldots, T_n)$, где шаблон $(\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F})(\␣, \ldots, \␣)$ с тем же числом подстановочных мест принадлежит сигнатуре Σ, а каждый из аргументов $T_1, \ldots, T_n$ сам является термом одного из этих трех видов; других термов нет. На рис. 2 приведен пример дерева разбора терма.

Определение 1.5 (Формулы языка сигнатуры Σ)**.** Предикат $\mathrm{Form}_\Sigma(\xi)$ («слово ξ есть формула сигнатуры Σ») задается рекурсивно:

F1. *Атомарные формулы:* $\mathrm{Form}_\Sigma(\text{'}(T = R)\text{'})$; если $\mathrm{PSym}(\eta)$, $\Sigma(\text{'}\eta\xi\text{'})$ и $\mathrm{Rel}_\Sigma(\tau\,;\,\xi)$, то $\mathrm{Form}_\Sigma(\text{'}\eta\tau\text{'})$;

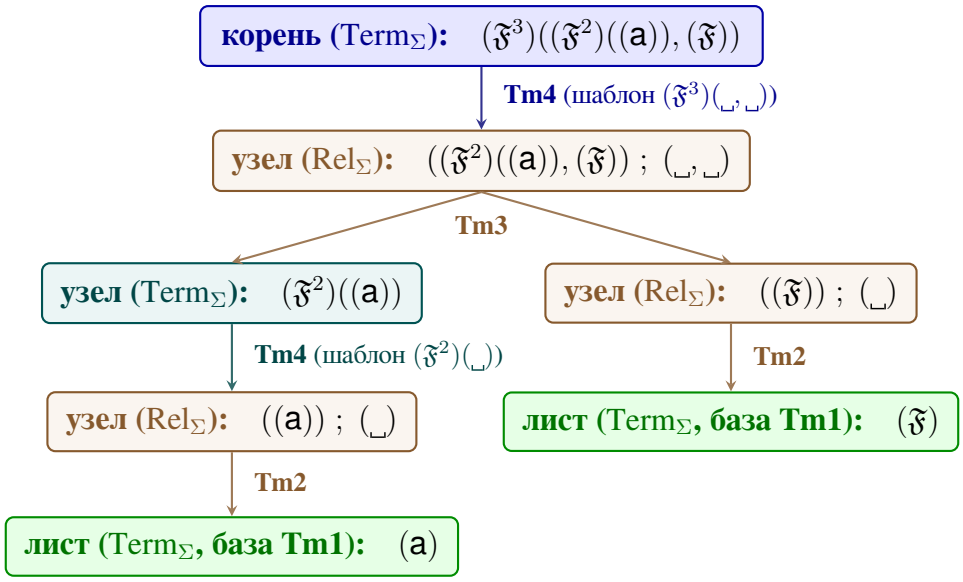


Рис. 2: Дерево разбора терма $(\mathfrak{F}^3)((\mathfrak{F}^2)(\mathsf{a}),(\mathfrak{F}))$ при $\Sigma(\text{'}(\mathfrak{F})\text{'})$, $\Sigma(\text{'}(\mathfrak{F}^2)(_)\text{'})$, $\Sigma(\text{'}(\mathfrak{F}^3)(_,_)\text{'})$: в листьях стоят переменная (a) и константа $(\mathfrak{F})$ (база **Tm1**), промежуточные узлы отвечают релевантным спискам (**Tm2**, **Tm3**) и применениям функциональных шаблонов (**Tm4**).

F2. *Отрицание:* если $\mathrm{Form}_\Sigma(\xi)$, то $\mathrm{Form}_\Sigma(\text{'}\neg\xi\text{'})$.

F3. *Бинарные связки:* если $\mathrm{Form}_\Sigma(\xi)$ и $\mathrm{Form}_\Sigma(\eta)$, то

$$\mathrm{Form}_\Sigma(\text{'}(\xi\wedge\eta)\text{'}),\qquad \mathrm{Form}_\Sigma(\text{'}(\xi\vee\eta)\text{'}),\qquad \mathrm{Form}_\Sigma(\text{'}(\xi\to\eta)\text{'}).$$

F4. *Кванторы:* если $\mathrm{Form}_\Sigma(\xi)$ и переменная x **не входит** в слово ξ, то

$$\mathrm{Form}_\Sigma(\text{'}\forall x\,\xi[x/a]\text{'}),\qquad \mathrm{Form}_\Sigma(\text{'}\exists x\,\xi[x/a]\text{'}).$$

F5. *Замыкание:* других формул нет.

За классом Form_Σ закрепляются ограниченные метапеременные φ,ψ,χ (тогда как каллиграфические $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ по-прежнему относятся к формулам ИВ). Класс всех формул Form_Σ при фиксированной сигнатуре Σ называется *языком сигнатуры* Σ и обозначается $\mathcal{L}_\Sigma$. Наглядная схема вложенности и разделения синтаксических классов сигнатуры Σ (в обозначениях раздела 2) приведена далее в § 2.2 на рис. 4. Пример дерева разбора формулы приведен на рис. 3.

Далее для произвольной бинарной связки из $\wedge,\vee,\to$ используются метазнаки $\circ,\bullet$, а для квантора из $\forall,\exists$ — метазнак Q.

Для доказательства однозначности разбора термов и формул вводятся вспомогательные классы слов, допускающие произвольные индивидные переменные на месте аргументов, и устанавливаются дизъюнктность классов и свойство беспрефиксности.

Определение 1.6 (Квазитермы и квазиформулы)**.** Классы *квазитермов* Term^*_Σ, *квазиформул* Form^*_Σ и отношение Rel^*_Σ для списков квазитермов задаются теми же правилами **Tm1**–**Tm5** и **F1**–**F5** определений 1.4 и 1.5 с двумя послаблениями: в **Tm1** допускаются любые индивидные переменные классов FVar и BVar, а в **F4** для любых $x\in\mathrm{BVar}$ и $\psi\in\mathrm{Form}^*_\Sigma$ полагается $\mathrm{Form}^*_\Sigma(\text{'}\forall x\,\psi\text{'})$ и $\mathrm{Form}^*_\Sigma(\text{'}\exists x\,\psi\text{'})$.

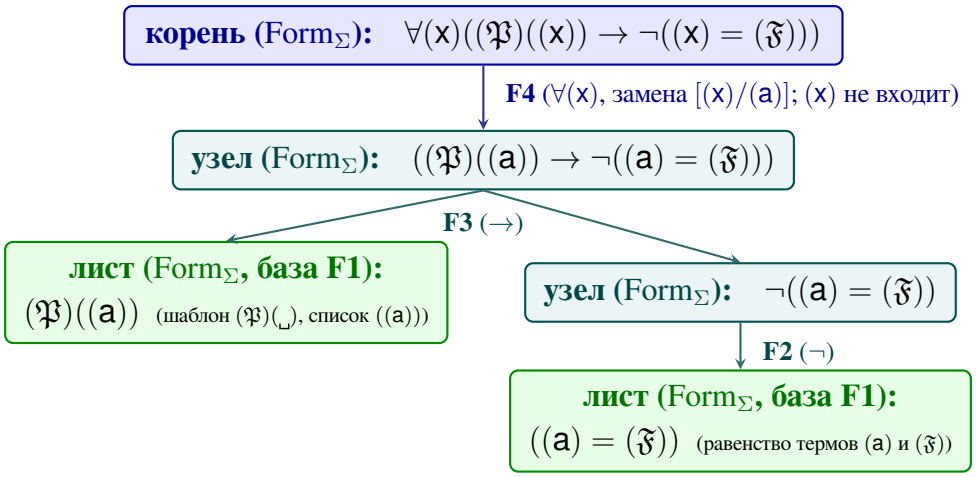


Рис. 3: Дерево разбора формулы $\forall(\mathsf{x})((\mathfrak{P})((\mathsf{x})) \to \neg((\mathsf{x}) = (\mathfrak{F})))$ при $\Sigma('(\mathfrak{F})')$ и $\Sigma('(\mathfrak{P})(_)')$: в листьях стоят атомарные формулы (база **F1**), которые в свою очередь могут быть разобраны по правилам для термов.

Индукцией по построению видно, что классы Term^*_Σ и Form^*_Σ замкнуты относительно пословной замены $\xi[u/a]$ любой свободной переменной $a \in \mathrm{FVar}$ на произвольную переменную $u \in \mathrm{FVar} \cup \mathrm{BVar}$ (такая замена не затрагивает кванторных префиксов $\mathsf{Q}x$, где $x \in \mathrm{BVar}$). В частности, для $\psi \in \mathrm{Form}^*_\Sigma$ и $x \in \mathrm{BVar}$ выполнено $\psi[x/a] \in \mathrm{Form}^*_\Sigma$, откуда $\mathrm{Term}_\Sigma \subseteq \mathrm{Term}^*_\Sigma$ и $\mathrm{Form}_\Sigma \subseteq \mathrm{Form}^*_\Sigma$.

Лемма 1.7 (Разделение классов и начальные подслова)**.**

(a) *Классы* Term_Σ *и* Form_Σ *не пересекаются.*

(b) *Ни одно слово класса* Term_Σ *или* Form_Σ *не является собственным начальным подсловом другого слова классов* Term_Σ *и* Form_Σ.

Доказательство. Ввиду включений $\mathrm{Term}_\Sigma \subseteq \mathrm{Term}^*_\Sigma$ и $\mathrm{Form}_\Sigma \subseteq \mathrm{Form}^*_\Sigma$ достаточно доказать оба утверждения для Term^*_Σ и Form^*_Σ.

(a) Всякое слово классов FVar, BVar, FSym и PSym начинается со скобки $($, за которой следует соответственно a, x, $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{P}$. Поэтому всякий квазитерм класса Term^*_Σ начинается со скобки $($, за которой вторым символом стоит a, x или $\mathfrak{F}$. Всякая же квазиформула класса Form^*_Σ начинается либо с одного из символов $\neg, \forall, \exists$, либо со скобки $($, за которой вторым символом стоит $\mathfrak{P}$ (для предикатных формул) или начальный символ квазитерма или квазиформулы (для $(T = R)$ и $(\varphi \circ \psi)$), то есть снова один из символов $(, \neg, \forall, \exists$. Поскольку первые два символа квазитерма и квазиформулы никогда не совпадают, классы Term^*_Σ и Form^*_Σ не пересекаются.

(b) Совместной структурной индукцией по построению слов классов Term^*_Σ, Rel^*_Σ и Form^*_Σ покажем, что ни одно слово ξ класса Term^*_Σ или Form^*_Σ не является собственным начальным подсловом другого слова η из Term^*_Σ или Form^*_Σ, а при фиксированной цепочке мест ζ ни один список τ с $\mathrm{Rel}^*_\Sigma(\tau;\zeta)$ не является собственным начальным подсловом другого списка θ с $\mathrm{Rel}^*_\Sigma(\theta;\zeta)$. Если одно из двух слов является собственным начальным подсловом другого, то их первые два символа совпадают; при этом все правила построения сводятся к трем структурным механизмам, сохраняющим беспрефиксность по свойствам слов из § I.1 статьи ИВ:

1. *Базовые скобочные атомы* (FVar, BVar, FSym, PSym): закрывающая скобка $)$ входит в каждое слово этих классов только последним символом, поэтому ни одно из

них не может быть собственным начальным подсловом другого; в частности, это дает базу **Tm1** для переменных.

2. *Префиксное соединение* ($\neg\varphi$, $\mathsf{Q}x\,\varphi$, а также C в **Tm1**, $C\tau$ в **Tm4** и $\eta\tau$ в **F1**): если в двух словах левые части принадлежат уже беспрефиксному классу, то по свойству беспрефиксности (и левосторонней сократимости конкатенации слов) левые части совпадают и сокращаются, перенося сравнение на правые части. Именно:

   - в отрицаниях $\neg\varphi$, $\neg\psi$ (**F2**) сокращается $\neg$, а в кванторных словах $\mathsf{Q}x\,\varphi$, $\mathsf{Q}y\,\psi$ (**F4**) после сокращения Q по беспрефиксности BVar совпадают и сокращаются переменные $x \equiv y$, что сводит задачу к предположению индукции для φ и ψ;
   - в словах, начинающихся с ($\mathfrak{F}$ (**Tm1**, **Tm4**) или ($\mathfrak{P}$ (**F1**), по беспрефиксности FSym и PSym совпадают головные имена, а по свойству антицепи сигнатуры Σ (определение 1.3) общее головное имя входит в Σ в составе единственного слова — либо константы C (тогда оба слова совпадают с C), либо единственного шаблона с цепочкой мест ζ, и тогда сокращение головного имени сводит задачу к спискам τ, θ с общей цепочкой мест ζ.

3. *Заключение в скобки с разделителем* (списки '(T)' и '(T,τ)' в **Tm2**–**Tm3**, равенства $(T = R)$ в **F1** и бинарные квазиформулы $(\varphi \circ \psi)$ в **F3**): после сокращения внешней открывающей скобки (первые составляющие оказываются начальными подсловами одного слова и по предположению индукции совпадают (причем в силу пункта (a) квазитерм T из $(T = R)$ не может совпасть с квазиформулой φ из $(\varphi \circ \psi)$, так что оба сравниваемых слова принадлежат одному виду). После сокращения первой составляющей в одноэлементном списке '(T)' сразу остается закрывающая скобка), исключающая собственное удлинение; в равенствах и бинарных квазиформулах совпадают и сокращаются разделители ($=$ или связка $\circ$), затем по предположению индукции совпадают вторые составляющие и финальная скобка); наконец, в составных списках '(T,τ)' и '(R,θ)' (**Tm3**) после сокращения первой составляющей и запятой приписывание слева скобки (возвращает к сравнению списков '(τ)' и '(θ)' для более короткой цепочки мест, что завершает индукцию. □

Предложение 1.8 (Однозначность разбора термов, списков и формул)**.**

(a) *Всякий терм T имеет ровно один из следующих видов: свободная переменная a; константа C сигнатуры Σ; слово $C\tau$ для единственного функционального шаблона $F \equiv C\zeta$ сигнатуры Σ и единственного списка термов τ с условием* $\mathrm{Rel}_\Sigma(\tau;\zeta)$*. При этом по всякому списку τ с условием* $\mathrm{Rel}_\Sigma(\tau;\zeta)$ *однозначно восстанавливаются входящие в него термы: если $\zeta \equiv$ '$(_)$', то $\tau \equiv$ '(T)' для единственного терма T; если $\zeta \equiv$ '$(_,\omega)$', то $\tau \equiv$ '(R,θ)' для однозначно определенных терма R и списка '(θ)' с* Rel_Σ'(θ)';'(ω)'.

(b) *Всякая формула имеет ровно один из следующих видов: $\eta\tau$ ($\Sigma(P)$, $P \equiv \eta\zeta$,* $\mathrm{Rel}_\Sigma(\tau;\zeta)$*); $(T = R)$; $\neg\varphi$; $(\varphi \circ \psi)$ ($\circ$ — одна из связок $\wedge, \vee, \to$); $\forall x\,\chi$; $\exists x\,\chi$. При этом все составляющие (предикатный шаблон P, релевантный список τ, термы T, R, связка $\circ$, подформулы φ, ψ, связанная переменная x и тело квантора χ) определены однозначно. В кванторном случае $\chi \equiv \varphi[x/a]$ для некоторой формулы $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma$ и свободной переменной $a \in$* FVar *(и для любой свободной переменной b, не входящей в χ, имеем $\chi[b/x] \equiv \varphi[b/a]$ и $\chi \equiv (\chi[b/x])[x/b]$).*

Доказательство. Для термов свободная переменная начинается с (a, а константа и функциональный терм — с (𝔉. При этом в слове $C\tau$ за закрывающей скобкой головного имени C сразу следует открывающая скобка (списка τ, а в константе C ($\Sigma(C)$) слово на этой закрывающей скобке оканчивается (что согласуется со свойством антицепи сигнатуры Σ, однозначно определяющим слово сигнатуры Σ по его головному имени). Если $'(T,\tau)' \equiv '(R,\theta)'$ при $\mathrm{Rel}_\Sigma('(T,\tau)';'(_,\zeta)')$ и $\mathrm{Rel}_\Sigma('(R,\theta)';'(_,\zeta)')$, то после сокращения начальной скобки (совпадение $T \equiv R$ следует из леммы 1.7 (b), после чего сокращение T и запятой дает $\tau \equiv \theta$, а значит $'(\tau)' \equiv '(\theta)'$. Для формул начальные пары символов (𝔓 (для $\eta\tau$), ((, ($\neg$, ($\forall$, ($\exists$ и начальные символы $\neg, \forall, \exists$ сразу разделяют все виды, кроме $(T = R)$ и $(\varphi \circ \psi)$ (в обоих этих случаях вторым символом может служить (; они не могут совпасть, так как после сокращения внешней скобки в $(T = R)$ стоит терм T, а в $(\varphi \circ \psi)$ — формула φ, что невозможно по лемме 1.7). Единственность составляющих каждого вида следует из леммы 1.7 (b) (для $\forall x\,\chi$ и $\exists x\,\chi$ — в классах Term^*_Σ и Form^*_Σ). В кванторном случае по определению 1.5 (**F4**) имеем $\chi \equiv \varphi[x/a]$, где x не входит в формулу φ, а для любой свободной переменной b, не входящей в χ, всякое вхождение x в χ образовалось из вхождения a в φ, поэтому $\chi[b/x] \equiv \varphi[b/a]$ и $(\chi[b/x])[x/b] \equiv \chi$. □

Лемма 1.9 (Замкнутость термов и формул относительно подстановки)**.** *Для любых термов $R, T \in \mathrm{Term}_\Sigma$, формулы $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma$ и свободной переменной $a \in \mathrm{FVar}$ выполнены условия $\mathrm{Term}_\Sigma('R[T/a]')$ и $\mathrm{Form}_\Sigma('\varphi[T/a]')$, причем слово $\varphi[T/a]$ содержит то же число вхождений связок и кванторов ($\neg, \wedge, \vee, \to, \forall, \exists$), что и φ.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что ни один терм класса Term_Σ не содержит символов связок и кванторов $\neg, \wedge, \vee, \to, \forall, \exists$, а слова классов FVar, BVar, FSym, PSym не являются собственными подсловами друг друга, так что пословные замены переменных не затрагивают иные классы символов и не создают ложных вхождений.

Замкнутость Term_Σ относительно подстановки $[T/a]$ (вместе с замкнутостью $\mathrm{Rel}_\Sigma(\tau;\xi)$ относительно покомпонентной замены $\tau[T/a]$) доказывается совместной структурной индукцией по правилам **Tm1**–**Tm4**: если $R \equiv a$, то $R[T/a] \equiv T \in \mathrm{Term}_\Sigma$; если $R \not\equiv a$ и R относится к базе **Tm1**, то $R[T/a] \equiv R \in \mathrm{Term}_\Sigma$; правила **Tm2**–**Tm4** переносятся с помощью предположения индукции, поскольку a не входит в $_$ и в головные имена из FSym.

Замкнутость Form_Σ и сохранение числа связок и кванторов доказываются индукцией по числу k вхождений символов $\neg, \wedge, \vee, \to, \forall, \exists$ в формулу φ (одновременно для всех $a \in \mathrm{FVar}$ и $T \in \mathrm{Term}_\Sigma$):

- $k = 0$ (**F1**): формула φ имеет вид $(R_1 = R_2)$ или $\eta\tau$ ($\eta \in \mathrm{PSym}$); по доказанному для Term_Σ и Rel_Σ слово $\varphi[T/a]$ принадлежит Form_Σ и не содержит связок и кванторов.

- Шаг **F2** ($\varphi \equiv \neg\psi$) и **F3** ($\varphi \equiv (\psi_1 \circ \psi_2)$): предположение индукции для ψ, ψ_1, ψ_2 дает $\psi[T/a], \psi_1[T/a], \psi_2[T/a] \in \mathrm{Form}_\Sigma$ с тем же числом связок и кванторов.

- Шаг **F4** ($\varphi \equiv \mathsf{Q}y\,\psi[y/b]$, где $\psi \in \mathrm{Form}_\Sigma$ содержит $k-1$ вхождений связок и кванторов, а $y \in \mathrm{BVar}$ не входит в ψ): если $b \equiv a$, то переменная a не входит в $\psi[y/a]$, поэтому $\varphi[T/a] \equiv \varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma$. Пусть $b \not\equiv a$.

  - Если b не входит в T, то, поскольку $y \in \mathrm{BVar}$ также не входит в T, пословные замены $[T/a]$ и $[y/b]$ коммутируют на ψ: $(\psi[y/b])[T/a] \equiv (\psi[T/a])[y/b]$. По предположению индукции $\psi[T/a] \in \mathrm{Form}_\Sigma$ имеет $k-1$ связок и кванторов, причем

y не входит в $\psi[T/a]$. По правилу **F4** получаем $\varphi[T/a] \equiv \mathsf{Q}y\,(\psi[T/a])[y/b] \in \mathrm{Form}_\Sigma$ (с k связками и кванторами).

– Если b входит в T, выберем свободную переменную $c \in \mathrm{FVar}$, не входящую ни в ψ, ни в T, и отличную от a и b. По предположению индукции (при $k-1$) для подстановки $[c/b]$ имеем $\psi' \equiv \psi[c/b] \in \mathrm{Form}_\Sigma$ с $k-1$ связками и кванторами, причем y не входит в ψ' и $\psi[y/b] \equiv (\psi[c/b])[y/c] \equiv \psi'[y/c]$. Поскольку c не входит в T и $c \not\equiv a$, к $\psi'[y/c]$ применим предыдущий случай: $(\psi'[y/c])[T/a] \equiv (\psi'[T/a])[y/c]$ и $\varphi[T/a] \equiv \mathsf{Q}y\,(\psi'[T/a])[y/c] \in \mathrm{Form}_\Sigma$. □

Однозначность разбора и лемма 1.9 гарантируют разрешимость классов PVar, FVar, BVar, FSym, PSym, FTpl, PTpl, а при разрешимой выборке Σ — и разрешимость классов Term_Σ, Rel_Σ и Form_Σ, а также корректность определений функций и предикатов структурной рекурсией. В частности, для кванторной формулы $\mathsf{Q}x\,\chi$ при переходе к телу квантора можно заменить x на произвольную свободную переменную b, не входящую в χ, получая по предложению 1.8 (b) и лемме 1.9 формулу $\chi[b/x] \in \mathrm{Form}_\Sigma$ строго меньшей сложности (с числом связок и кванторов на единицу меньше).

Замечание 1.10 (Восходящая свертка и порождение через пословные замены)**.** Беспрефиксность и однозначность разбора допускают наглядную алгоритмическую интерпретацию через базовую операцию пословной замены $\xi[\zeta/\eta]$ из § I.1 статьи ИВ, если выбрать в качестве эталонного терма базовую переменную (a), а в качестве эталонного атома для формул — пропозициональную переменную (p). Последовательными заменами снизу вверх по дереву построения всякая индивидная переменная и всякая константа C сигнатуры Σ ($\Sigma(C)$) заменяются на (a), затем элементарные функциональные вызовы вида $C((\mathsf{a}),\dots,(\mathsf{a}))$ (для шаблонов из Σ) снова сворачиваются в (a), элементарные атомарные формулы $\zeta((\mathsf{a}),\dots,(\mathsf{a}))$ и $((\mathsf{a}) = (\mathsf{a}))$ заменяются на (p), после чего конструкции $\neg(\mathsf{p})$, $\mathsf{Q}(\mathsf{a})\,(\mathsf{p})$ и $((\mathsf{p}) \circ (\mathsf{p}))$ последовательно сворачиваются в (p). В результате всякий квазитерм сворачивается в (a), а всякая квазиформула — в (p). Свойство антицепи сигнатуры Σ и замкнутость скобочных конструкций из доказательства леммы 1.7 означают, что элементарные подслова, подлежащие свертке, не могут перекрываться на границе между квазитермом или квазиформулой ξ и непустым приписанным справа словом ω: после свертки начального подслова ξ в (a) или (p) от слова $\xi\omega$ остается слово вида $(\mathsf{a})\theta$ или $(\mathsf{p})\theta$, к которому ни одно правило свертки в единый эталон (a) или (p) уже неприменимо, поскольку составные конструкции всегда начинаются с одного из символов $(, \neg, \forall, \exists$ либо с головного имени из FSym или PSym.

Двойственным образом операция пословной замены $\xi[T/a]$ позволяет породить те же самые классы Term_Σ и Form_Σ вообще без символа подстановочного места $\sqcup$ в алфавите и без вспомогательного отношения Rel_Σ: достаточно в шаблонах FTpl и PTpl вместо цепочки мест $(\sqcup,\dots,\sqcup)$ сразу записывать канонический список попарно различных свободных переменных $((\mathsf{a})), ((\mathsf{a}),(\mathsf{a}^2)), ((\mathsf{a}),(\mathsf{a}^2),(\mathsf{a}^3)),\dots$ (порождаемый рекурсивно приписыванием следующей переменной $(\eta\mathsf{a})$ после последней переменной (η)), включить входящие в сигнатуру Σ шаблоны непосредственно в базу термов и атомарных формул, а составные термы и предикатные атомарные формулы порождать из них правилом одиночной подстановки терма вместо свободной переменной $\xi \mapsto \xi[T/a]$ (при последовательной подстановке нескольких аргументов коллизии имен устраняются через свежие промежуточные переменные аналогично § II.2 статьи ИВ). В таком представлении, однако, один и тот же терм или атом получает бесконечно много различных деревьев построения, тогда как конструкция с безымянны-

ми местами $_$ и списками Rel_Σ собирает каждое составное выражение из его непосредственных подслов за один шаг и тем самым сразу отождествляет дерево построения с деревом синтаксического разбора.

1.3. Перевод формального канона во внутреннее представление прувера Lean

Механизмы, возникшие при строгом построении синтаксиса ИП над конечным алфавитом — разделение свободных и связанных переменных, запрет свободного появления связанных переменных в термах, а также контроль арности и единственности объявления имен сигнатуры, — имеют близкую аналогию во внутреннем устройстве современных интерактивных систем проверки доказательств (пруверов), в частности в ядре системы **Lean** (версии Lean 4). При этом ядро Lean типизировано, а разделение на `bvar` и `fvar` (локально безымянное представление) является приемом внутренней реализации выражений, а не разделением исходного текстового алфавита.

Ключевое различие состоит в границе между линейным текстом и синтаксическим деревом. В настоящем изложении формальная система строится непосредственно от плоских строк в алфавите $\mathbb{A}$, вследствие чего все проблемы разделителей, скобок и однозначности разбора (лемма 1.7 и предложение 1.8) решаются внутри самого синтаксического фундамента. В системе Lean разбор текстового файла со скобками и запятыми вынесен во внешний парсер и элаборатор, тогда как доверенное логическое ядро работает сразу с готовыми деревьями разбора — значениями индуктивного типа выражений `Expr`. Внутри этого представления канон раздела 1 переводится на конструкции ядра Lean следующим образом.

1. Разделение FVar **и** BVar**: локально безымянное представление.** В типе `Expr` ядра Lean переменные точно так же разделены на два непересекающихся конструктора (так называемое *локально безымянное представление*, *locally nameless representation*):

- свободным переменным FVar соответствует конструктор `Expr.fvar`, хранящий уникальный идентификатор свободной переменной; только такие переменные встречаются в открытых термах и контекстах гипотез;
- связанным переменным BVar соответствует конструктор `Expr.bvar` с *индексом де Брауна* k, указывающим номер охватывающего квантора (отсчитываемый вверх по дереву от данного вхождения; например, `bvar` 0 указывает на ближайший связывающий квантор).

В корректно сформированном выражении Lean, как и в формулах класса Form_Σ определения 1.5, несвязанных вхождений `bvar` не бывает. Правилу **F4** навешивания квантора $\forall x\,\varphi[x/a]$ в ядре Lean соответствует встроенная операция `abstract`: она заменяет в дереве φ все вхождения данной свободной переменной `fvar` на соответствующий индекс де Брауна `bvar`, после чего оборачивает результат в конструктор квантора `Expr.forallE` (для квантора существования $\exists x\,\varphi[x/a]$ применяется та же операция `abstract` с оберткой в конструктор λ-абстракции `Expr.lam` и предикат существования `Exists`). Обратному переходу — подстановке терма T при раскрытии квантора — отвечает операция `instantiate`, заменяющая `bvar` 0 на дерево

терма T. Поскольку никакое замкнутое по `bvar` дерево терма T не содержит несвязанных `bvar`, захват переменных кванторами при подстановке невозможен синтаксически, а индексы де Брауна избавляют от необходимости выбирать имена связанных переменных.

2. Шаблоны, релевантные списки и свойство антицепи: каррирование и среда. Вместо позиционных шаблонов из FTpl $\cup$ PTpl и совместной рекурсии $\mathrm{Rel}_\Sigma(\tau;\xi)$ ядро Lean использует *каррирование* и типизированную таблицу объявлений — среду `Environment`:

- предметная область носителя фиксируется как тип U (типа `Type`), а элементы сигнатуры объявляются как константы в среде `Environment` (выражения `Expr.const`); при этом свойство антицепи определения 1.3 отвечает требованию уникальности имени в среде: каждое головное имя может быть объявлено в `Environment` ровно один раз с единственным типом;

- шаблоны произвольной длины заменяются итерированными функциональными типами (задаваемыми тем же конструктором `Expr.forallE` без зависимости): константе $C \in \mathrm{FSym}$ (как 0-арной функции) соответствует тип U, функциональному шаблону $F \in \mathrm{FTpl}$ вида $C\xi$ с n подстановочными местами — тип $U \to \cdots \to U$ (n стрелок), а предикатному шаблону $P \in \mathrm{PTpl}$ вида $\eta\xi$ с n подстановочными местами — тип $U \to \cdots \to U \to \mathtt{Prop}$;

- релевантные списки термов $\mathrm{Rel}_\Sigma(\tau;\xi)$ и их приписывание к головному имени ($C\tau$ при $F \equiv C\xi$) заменяются вложенным бинарным применением функции к одному аргументу `Expr.app`: выражение $C(T_1,\dots,T_n)$ представляется в памяти деревом
$$\mathtt{app}\big(\dots\,\mathtt{app}(\mathtt{app}(C,\,T_1),\,T_2)\dots,\,T_n\big),$$
а согласованность числа аргументов с цепочкой мест (условие $\mathrm{Rel}_\Sigma(\tau;\xi)$) проверяется системой типов ядра по числу стрелок в объявленном типе константы.

В таблице сопоставлены ключевые конструкции строкового канона раздела 1 и их аналоги в ядре Lean 4.

Строковый канон (раздел 1)	**Ядро системы Lean 4 (`Expr`, `Environment`)**
Слово в 16-символьном алфавите $\mathbb{A}$; лемма 1.7 и предложение 1.8	Значение древовидного типа `Expr` (разбор текста вынесен во внешний парсер)
Свободная переменная $a \in \mathrm{FVar}$	Конструктор `Expr.fvar`
Связанная переменная $x \in \mathrm{BVar}$	Конструктор `Expr.bvar` (индекс де Брауна)
Навешивание квантора $\forall x\, \varphi[x/a]$ (**F4**)	Операция `abstract` и конструктор `Expr.forallE`
Раскрытие квантора $(\chi[b/x])[T/b]$ ($b \notin \chi$, предл. 1.8 (b))	Операция `instantiate`
Сигнатура Σ как антицепь в $\mathrm{FSym} \cup \mathrm{FTpl} \cup \mathrm{PTpl}$	Уникально объявленные константы `Expr.const` в среде `Environment`
Число мест $_$ в цепочке ξ шаблона $F \equiv C\xi$ / $P \equiv \eta\xi$	Число стрелок в типе $U \to \cdots \to U$ или $U \to \cdots \to$ `Prop`
Применение шаблона $F \equiv C\xi$ к релевантному списку τ (терм $C\tau$)	Цепочка бинарных узлов `Expr.app` с проверкой типа
Равенство $(T = R)$, логические связки $\neg, \wedge, \vee, \to$	Применения встроенных констант `Eq`, `Not`, `And`, `Or` и конструктора `Expr.forallE`

2. Исчисление предикатов

2.1. Язык первого порядка

В предыдущем разделе мы, следуя финитарному канону, заданному при описании языка ИВ, показали, каким образом задается язык исчисления предикатов первого порядка в конечном алфавите с помощью небольшого арсенала средств специального языка, определенных в части I статьи ИВ. Однако для более удобного восприятия картины в целом дадим ниже более привычное и компактное описание языка ИП, использующее теоретико-множественную нотацию и более вольное обращение с обозначениями.

Итак, мы предполагаем, что логический аппарат ИП включает стандартные логические связки $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ (где $\varphi \leftrightarrow \psi$ служит сокращением для $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$), символы кванторов $\forall, \exists$ и символ равенства $=$. Как и в § 1.2, произвольный квантор ($\forall$ или $\exists$) обозначается метазнаком Q (чтобы отличать его от предикатной буквы Q). Мы также предполагаем, что переменные p, q, r пробегают пропозициональные переменные ИВ, а переменные $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ — формулы ИВ.

Далее, мы сохраняем за буквами $a, b, c, \ldots$ из начала латинского алфавита обозначение произвольных свободных индивидных переменных (FVar), а за буквами x, y, z и некоторыми другими из конца латинского алфавита — обозначение произвольных связанных индивидных переменных (BVar). Пусть Const_Σ — множество константных символов, Func_Σ — множество функциональных символов, Pred_Σ — множество предикатных символов. Их объединение $\Sigma = \mathrm{Const}_\Sigma \cup \mathrm{Func}_\Sigma \cup \mathrm{Pred}_\Sigma$ представляет собой сигнатуру рассматриваемого языка. Содержательно эти три множества задаются выборками из классов FSym, FTpl и PTpl, поэтому Σ не более чем счетна (так как FSym, FTpl, PTpl состоят из слов над конечным алфавитом $\mathbb{A}$). Дизъюнктность трех множеств $\mathrm{Const}_\Sigma, \mathrm{Func}_\Sigma, \mathrm{Pred}_\Sigma$ выполнена автоматически; содержательным требованием определения 1.3 служит условие антицепи («одно головное имя — одна местность»):

в сигнатуре Σ не могут одновременно присутствовать константа и функциональный шаблон или два шаблона разной местности с одним и тем же головным именем.

За константными символами мы, как и прежде, закрепляем метапеременные C, D, за функциональными — F, G, H, за предикатными — P, Q, за термами — T, R, за формулами — $\varphi, \chi, \psi, \alpha, \beta$, причем α, β используются преимущественно для нелогических аксиом (таким образом, строчные латинские буквы всегда служат переменными того или иного рода, прописные — нелогическими символами и термами, а указанные греческие буквы, не пересекающиеся с шестеркой общих словесных метапеременных $\xi, \eta, \zeta, \theta, \tau, \omega$ из § 1.1, — формулами). При этом мы допускаем использование различных акцентов и цифровых индексов у любых буквенных обозначений для обеспечения их надлежащего количества ($a_1, b'', C_1, \hat{D}_0, F_0, G'_4, P_1, Q_8, T_1, R'$ и т. п.).

Функциональные и предикатные символы имеют определенную местность (арность $n \geq 1$, либо $n = 0$ для констант), которую в каноне раздела 1 задает цепочка подстановочных мест или список различных свободных переменных в скобках следом за символом: $F(a), G(a, b), P(a, b, c)$ и т. п. В соответствии с этим в изложении используется сокращенная запись с числовой арностью n и списком аргументов $x_1, \ldots, x_n$ или $\bar{x}$, а также стандартное сокращение для кванторных формул: для формулы $\varphi(a)$ со свободной переменной a (и в общем случае с переменными $a_1, \ldots, a_n$) запись $\forall x\, \varphi(x)$ (соответственно $\exists x\, \varphi(x)$, $Q(x_1, \ldots, x_n)$, $F(\bar{x})$) означает каноническую формулу $\forall x\, \varphi[x/a]$ (соответственно $\exists x\, \varphi[x/a]$, $(Q(a_1, \ldots, a_n))[x_1/a_1] \ldots [x_n/a_n]$, $(F(a_1, \ldots, a_n))[\bar{x}/\bar{a}]$). Выражения $Q(x_1, \ldots, x_n)$, $F(\bar{x})$, $\varphi(x)$ со связанными переменными сами по себе не являются формулами или термами и употребляются только внутри области действия соответствующего кванторного префикса как сокращение, раскрываемое указанными подстановками. В общем случае, когда конкретная арность символа не фиксируется, используется нотация вида $F(a, \ldots, b)$, $P(a, \ldots, b)$ либо указывается одно головное имя F или P.

Построение множества всех термов Term_Σ в целом повторяет определение 1.4, но следует идее замечания 1.10, согласно которому один и тот же терм допускает много различных деревьев построения:

Tm1. всякая свободная переменная и всякая константа есть терм;

Tm2. если $F(a, \ldots, b)$ — функциональный символ сигнатуры Σ, записанный с попарно различными свободными переменными $a, \ldots, b$, то $F(a, \ldots, b)$ есть терм;

Tm3. если R и T — термы, а a — свободная переменная, то $R[T/a]$ есть терм;

Tm4. других термов нет.

Аналогичным образом задается множество формул Form_Σ в сигнатуре Σ:

Fm1. если T, R — термы, то $(T = R)$ есть формула;

Fm2. если $P(a, \ldots, b)$ — предикатный символ сигнатуры Σ, записанный с попарно различными свободными переменными $a, \ldots, b$, то $P(a, \ldots, b)$ есть формула;

Fm3. если φ — формула, T — терм и a — свободная переменная, то $\varphi[T/a]$ есть формула;

Fm4. если φ, ψ — формулы, то формулами также являются

$$\neg\varphi,\ (\varphi \wedge \psi),\ (\varphi \vee \psi),\ (\varphi \to \psi),\ \forall x\ \varphi[x/a],\ \exists x\ \varphi[x/a],$$

где a — произвольная свободная переменная, а связанная переменная x не входит в формулу φ;

Fm5. других формул нет.

Формулы, не содержащие связок и кванторов, т. е. являющиеся равенствами термов или получаемые подстановками термов в предикатные символы (без применения правила **Fm4**), называются *атомарными*.

Свободная переменная *входит* в терм или формулу, если она является подсловом этого слова. Квантор $\forall x\ \varphi[x/a]$ «закрывает» переменную a: она не входит в полученную формулу. Терм или формула, в которые не входит ни одна свободная переменная, называются *замкнутыми*; замкнутая формула также называется *предложением*, класс предложений обозначается Sent.

Поскольку классы FVar и BVar не пересекаются, подстановка терма T вместо свободной переменной a в терм R или формулу φ совпадает с пословной заменой $R[T/a]$ и $\varphi[T/a]$ и не может привести к захвату переменных кванторами. По этой же причине разрешение правила **Fm3** для произвольных, а не только атомарных формул не расширяет класс Form_Σ (по лемме 1.9 класс Form_Σ замкнут относительно подстановок $\varphi[T/a]$): избыточность правил **Tm3** и **Fm3** лишь порождает множество различных деревьев построения одного и того же выражения. Например, терм $F(C, D)$ при бинарном функциональном символе $F(a, b)$ можно получить из $F(a, b)$ как в порядке $(F(a, b)[C/a])[D/b]$, так и в порядке $(F(a, b)[D/b])[C/a]$ (а также через любые свежие промежуточные переменные или фиктивные подстановки $\xi[T/c]$ при c, не входящей в ξ). Аналогично формула $(P(C) \wedge P(D))$ строится либо по правилу **Fm4** из атомарных формул $P(C)$ и $P(D)$, либо по правилу **Fm3** из формулы $(P(a) \wedge P(b))$ последовательными подстановками $[C/a]$ и $[D/b]$. При этом однозначность синтаксического разбора каждой формулы сохраняется в силу предложения 1.8.

2.2. Аксиомы и правила вывода

Исчисление предикатов строится над формулами фиксированной сигнатуры Σ по схеме гильбертовского типа: к пропозициональным аксиомам и правилу Modus Ponens добавляются кванторные схемы, аксиомы равенства и правила введения кванторов (правила Бернайса).

Определение 2.1 (Предикат «быть аксиомой ИП)**.** Слово ξ обладает свойством Ax (записывается $\mathrm{Ax}(\xi)$) и называется *аксиомой ИП*, если оно является формулой и тождественно одной из следующих формул (при произвольных формулах φ, ψ, χ, пропозициональных переменных p, q, r, свободной переменной a, связанной переменной x и термах T, R, T_0):

Ax1. *Пропозициональные схемы аксиом:* $\mathcal{A}[\varphi/p][\psi/q][\chi/r]$, где $\mathcal{A}$ — аксиома ИВ (ввиду непересечения PVar и Form_Σ замены не затрагивают φ, ψ, χ, а условие $\xi \in \mathrm{Form}_\Sigma$ означает, что все пропозициональные переменные в $\mathcal{A}$ заменены).

Ax2. *Кванторные схемы аксиом* (при условии, что связанная переменная x не входит в φ; корректность $\varphi[T/a] \in \mathrm{Form}_\Sigma$ обеспечена леммой 1.9):

$$\forall x\, \varphi[x/a] \to \varphi[T/a], \qquad \varphi[T/a] \to \exists x\, \varphi[x/a].$$

Ax3. *Схемы аксиом равенства:*

- *рефлексивность:* $T = T$;
- *конгруэнтность для термов:* $(T = R) \to (T_0[T/a] = T_0[R/a])$;
- *конгруэнтность для формул:* $(T = R) \to (\varphi[T/a] \to \varphi[R/a])$.

Никакие другие слова свойством Ax не обладают. Все аксиомы групп Ax1–Ax3 *логические*: они принимаются при любой сигнатуре и не включаются в списки нелогических аксиом конкретных теорий. В исчислении предикатов без равенства группа 3 отсутствует.

Замечание 2.2 (Атомарная форма аксиом конгруэнтности)**.** В ряде изложений (например, в формальной арифметике, где для операции следования S выписывается аксиома $a = b \to S(a) = S(b)$) конгруэнтность постулируется лишь для атомарных выражений — функциональных и предикатных символов сигнатуры (и для самого равенства), после чего общие схемы для произвольных термов T_0 и формул φ выводятся структурной индукцией, включая индукцию по числу аргументов. Схемы группы 3 определения 2.1 равносильны такому заданию и не требуют перечисления символов сигнатуры и их местностей.

При конечной сигнатуре Σ класс аксиом Ax разрешим: для всякого слова ξ разбор по предложению 1.8 проверяет, является ли ξ формулой, после чего принадлежность к аксиомам устанавливается за конечное число шагов. Именно: для пропозициональных схем **Ax1** и рефлексивности $(T = T)$ проверка сводится к прямому сличению подформул и подтермов по дереву разбора (предложение 1.8); для кванторных схем **Ax2** (вида $\forall x\, \chi \to \theta$ или $\theta \to \exists x\, \chi$) формула $\varphi \equiv \chi[b/x]$ восстанавливается по кратчайшей переменной $b \in \mathrm{FVar}$, не входящей в χ, после чего при $b \notin \varphi$ требуется $\theta \equiv \varphi$, а при наличии b в φ терм T однозначно считывается по позиции первого вхождения b; для схем конгруэнтности **Ax3** термы T, R заданы посылкой $(T = R)$, а все возможные шаблоны T_0 или φ (с одной свежей переменной a) отвечают конечным подмножествам вхождений T в левую часть заключения и перебираются за конечное число шагов.

Определение 2.3 (Предикат «быть теоремой ИП»)**.** Предикат $\mathrm{Thm}(\xi)$ задается рекурсивно:

T1. *База:* если $\mathrm{Ax}(\varphi)$, то $\mathrm{Thm}(\varphi)$.

T2. *Правило Modus Ponens:* если $\mathrm{Thm}(\varphi)$ и $\mathrm{Thm}(\text{'}\varphi \to \psi\text{'})$, то $\mathrm{Thm}(\psi)$.

T3. *Правила Бернайса:*

- если $\mathrm{Thm}(\text{'}\varphi \to \psi\text{'})$, a не входит в φ и x не входит в ψ, то $\mathrm{Thm}(\text{'}\varphi \to \forall x\, \psi[x/a]\text{'})$;
- если $\mathrm{Thm}(\text{'}\varphi \to \psi\text{'})$, a не входит в ψ и x не входит в φ, то $\mathrm{Thm}(\text{'}\exists x\, \varphi[x/a] \to \psi\text{'})$.

T4. *Замыкание:* никакие другие слова свойством Thm не обладают.

Построение для предиката Thm называется *выводом* (или *доказательством*) в ИП.

Взаимное расположение синтаксических классов фиксированной сигнатуры Σ — термов (Term_Σ), связанных переменных (BVar) и формул (Form_Σ), включая предложения (Sent), аксиомы (Ax) и теоремы (Thm), — приведено на рис. 4.

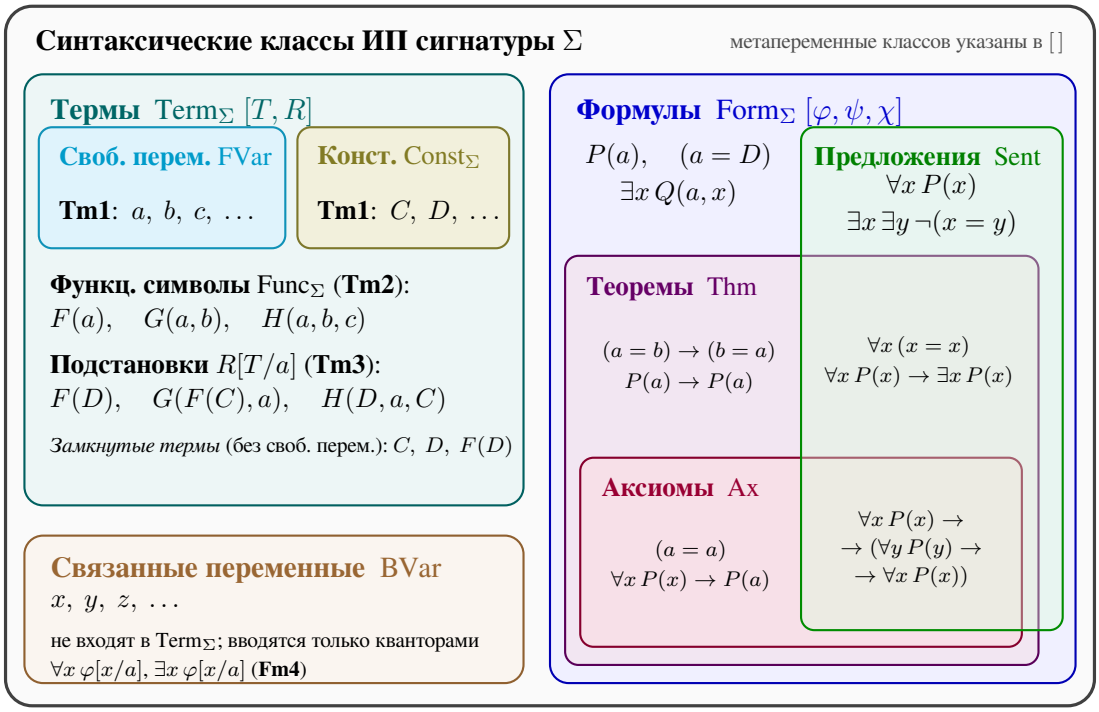


Рис. 4: Синтаксические классы исчисления предикатов фиксированной сигнатуры Σ: непересекающиеся классы термов (Term_Σ), связанных переменных (BVar) и формул (Form_Σ) с выделением предложений (Sent), аксиом (Ax) и теорем (Thm).

Предложение 2.4 (Производное правило обобщения)**.** *Если* $\mathrm{Thm}(\psi)$, *то* $\mathrm{Thm}(\text{'}\forall x\,\psi[x/a]\text{'})$ *для любой свободной переменной* a *и любой связанной переменной* x, *не входящей в* ψ.

Доказательство. Выберем свободную переменную b, отличную от a, и положим $\psi' \equiv \psi[b/a]$; тогда a не входит в ψ'. Формула $\varphi \equiv \text{'}\psi' \to (\psi' \to \psi')\text{'}$ является пропозициональной аксиомой (подстановкой $[\psi'/p][\psi'/q]$ в аксиому $p \to (q \to p)$), поэтому $\mathrm{Thm}(\varphi)$, и при этом a не входит в φ. По аксиоме утверждения консеквента $\psi \to (\varphi \to \psi)$ и правилу Modus Ponens из $\mathrm{Thm}(\psi)$ следует $\mathrm{Thm}(\text{'}\varphi \to \psi\text{'})$. Так как a не входит в φ и x не входит в ψ, правило Бернайса **T3** дает $\mathrm{Thm}(\text{'}\varphi \to \forall x\,\psi[x/a]\text{'})$. Применение Modus Ponens к $\mathrm{Thm}(\varphi)$ завершает вывод $\mathrm{Thm}(\text{'}\forall x\,\psi[x/a]\text{'})$. □

Всякая пропозициональная тавтология, подстановка в которую дает формулу сигнатуры Σ, выводима в ИП на основании одной лишь группы Ax1 и правила **T2** (поскольку пропозициональная часть совпадает с ИВ). Так, например, $\mathrm{Thm}(\text{'}\forall x\,\varphi[x/a] \to \exists x\,\varphi[x/a]\text{'})$ (где x не входит в φ) выводится из двух кванторных аксиом $\forall x\,\varphi[x/a] \to \varphi$ и $\varphi \to \exists x\,\varphi[x/a]$ (здесь $T \equiv a$) с помощью пропозициональной теоремы — закона силлогизма $((\chi_1 \to \chi_2) \to ((\chi_2 \to \chi_3) \to (\chi_1 \to \chi_3)))$ — и двух применений правила **T2** (Modus Ponens).

Пример дерева вывода. В качестве примера полного вывода в ИП, использующего исключительно правила **T1**–**T3** без производных тавтологий, приведем дерево вывода теоремы $\exists y\,\forall x\,P(x,y)\to\forall x\,\exists y\,P(x,y)$ (для различных a,b и различных x,y; рис. 5). В отличие от дерева вывода в статье ИВ, оно ориентировано традиционным для логики образом: аксиомы (листья) расположены вверху, а доказываемая теорема (корень) — внизу.

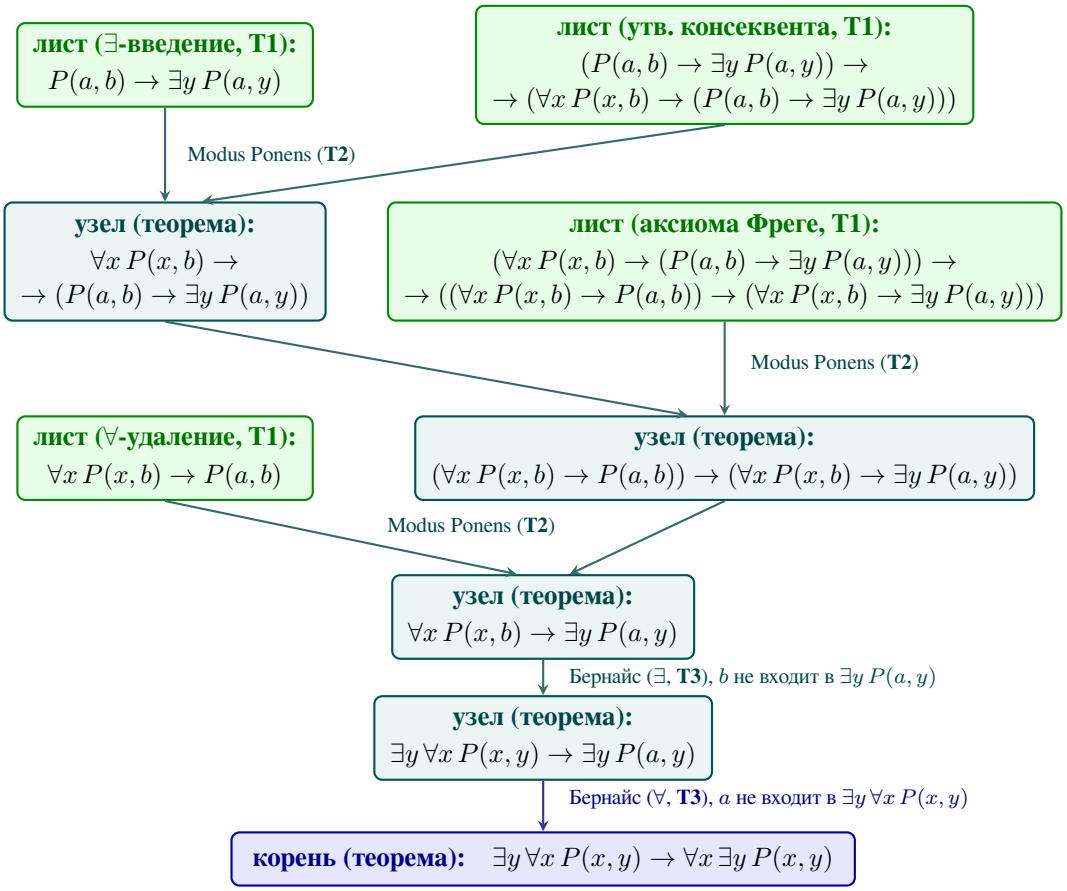


Рис. 5: Дерево вывода теоремы $\exists y\,\forall x\,P(x,y)\to\forall x\,\exists y\,P(x,y)$ с корнем внизу: сверху стоят четыре аксиомы (база **T1**), три шага Modus Ponens (**T2**) дают $\forall x\,P(x,b)\to\exists y\,P(a,y)$, а два применения правил Бернайса (**T3**) навешивают кванторы.

Замечание 2.5 (Неразрешимость класса теорем ИП)**.** В отличие от исчисления высказываний (где класс Thm разрешим по таблице истинности), в исчислении предикатов при сигнатуре, содержащей хотя бы один двуместный предикатный символ (или достаточный набор функциональных символов), не существует алгоритма, который по произвольной формуле φ за конечное число шагов определял бы, выполнено ли $\mathrm{Thm}(\varphi)$ (теорема Черча–Тьюринга). При этом сам класс Thm остается рекурсивно перечислимым: предъявленный вывод проверяется за конечное число шагов.

2.3. Выводимость в контексте списка гипотез

Чтобы формализовать вывод из конечного списка гипотез как единое слово, в § II.3 статьи ИВ базовый 7-символьный алфавит расширялся свежим символом-разделителем — запятой — до $\mathbb{A}'$. В языке первого порядка запятая уже входит в

16-символьный алфавит $\mathbb{A}$ (внутри термов и атомарных формул); тем не менее, в силу беспрефиксности формул (лемма 1.7 (b)) и свойства редактора (§ I.1 статьи ИВ) любой внешний список формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ (как и цепочка формул вывода) однозначно разбирается слева направо без введения 17-го символа-разделителя. Далее запятая используется и для записи списков гипотез вида Γ, ψ (для пустого контекста Γ запись Γ, ψ означает одноэлементный список ψ). Покомпонентная замена $\Gamma[b/a]$ в списке Γ определяется индуктивно: $\psi[b/a]$ для одноэлементного списка и $(\Gamma, \psi)[b/a] \equiv \Gamma[b/a], \psi[b/a]$ (для пустого контекста $\Gamma[b/a] \equiv \Gamma$).

Определение 2.6 (Список формул и выводимость в контексте)**.** Предикат $\mathrm{List}(\Gamma)$ и отношение $\varphi \trianglelefteq \Gamma$ («формула φ входит в список Γ») задаются совместной рекурсией:

L1. *Одноэлементный список:* $\mathrm{List}(\psi)$ и $\psi \trianglelefteq \psi$.

L2. *Присоединение формулы:* если $\mathrm{List}(\Gamma)$, то $\mathrm{List}('\Gamma, \psi')$ и $\psi \trianglelefteq \Gamma, \psi$; если при этом $\varphi \trianglelefteq \Gamma$, то $\varphi \trianglelefteq \Gamma, \psi$.

L3. *Замыкание:* других списков и пар отношения $\trianglelefteq$ нет.

Как и в ИВ, метапеременные Γ, Δ пробегают списки формул и могут обозначать также пустой контекст (в который не входит ни одна формула). Для фиксированного контекста Γ предикат $\Gamma \vdash \varphi$ («формула φ выводима в контексте Γ») задается рекурсивно:

D1. *База аксиом:* если $\mathrm{Ax}(\varphi)$, то $\Gamma \vdash \varphi$.

D2. *База гипотез:* если $\varphi \trianglelefteq \Gamma$, то $\Gamma \vdash \varphi$.

D3. *Modus Ponens:* если $\Gamma \vdash \varphi$ и $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, то $\Gamma \vdash \psi$.

D4. *Правила Бернайса в контексте:*

- если $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, причем a не входит ни в одну формулу списка Γ, ни в φ, и x не входит в ψ, то $\Gamma \vdash \varphi \to \forall x\, \psi[x/a]$;
- если $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, причем a не входит ни в одну формулу списка Γ, ни в ψ, и x не входит в φ, то $\Gamma \vdash \exists x\, \varphi[x/a] \to \psi$.

D5. *Замыкание:* никакие другие формулы в контексте Γ не выводимы.

Условие невхождения a в формулы списка Γ в правиле **D4** необходимо для сохранения семантической корректности: без него из гипотезы $P(a)$ (то есть $P(a) \vdash (b = b) \to P(a)$) выводилась бы формула $\forall x\, P(x)$, хотя свойство P для отдельного элемента не влечет его выполнимости для всех элементов. Если a не входит в Γ и x не входит в ψ, то из $\Gamma \vdash \psi$ выводится $\Gamma \vdash \forall x\, \psi[x/a]$ тем же приемом, что и в предложении 2.4.

Лемма 2.7 (Переименование свободных переменных в выводе)**.** *Пусть дан вывод $\mathcal{D}$ формулы φ в контексте Γ ($\Gamma \vdash \varphi$), $a \in \mathrm{FVar}$ — произвольная свободная переменная, а свободная переменная $b \in \mathrm{FVar}$ не входит ни в одну формулу вывода $\mathcal{D}$ (в частности, не входит в Γ и φ). Тогда $\Gamma[b/a] \vdash \varphi[b/a]$, причем существует вывод $\mathcal{D}'$ этого утверждения, длина которого не превосходит длины $\mathcal{D}$.*

Доказательство. При $b \equiv a$ утверждение тривиально ($\Gamma[a/a] \equiv \Gamma$, $\varphi[a/a] \equiv \varphi$). Пусть $b \not\equiv a$; проведем индукцию по числу шагов (длине) вывода $\mathcal{D}$.

- *База аксиом* (**D1**): если $\mathrm{Ax}(\varphi)$, то $\mathrm{Ax}(\text{'}\varphi[b/a]\text{'})$. Действительно:
  - для схемы **Ax1** ($\varphi \equiv \mathcal{A}[\psi_1/p][\psi_2/q][\psi_3/r]$) ввиду непересечения PVar и FVar имеем $\varphi[b/a] \equiv \mathcal{A}[\psi_1[b/a]/p][\psi_2[b/a]/q][\psi_3[b/a]/r]$, где $\psi_i[b/a] \in \mathrm{Form}_\Sigma$ по лемме 1.9;
  - для схемы **Ax2** ($\forall x\, \psi[x/c] \to \psi[T/c]$ или $\psi[T/c] \to \exists x\, \psi[x/c]$ с $x \notin \psi$) и обеих схем конгруэнтности **Ax3** ($(T = R) \to (T_0[T/c] = T_0[R/c])$ и $(T = R) \to (\psi[T/c] \to \psi[R/c])$) с параметром $c \in$ FVar заметим, что если $c \equiv a$, то a не входит в $\forall x\, \psi[x/a]$ (или $\exists x\, \psi[x/a]$), а переменная b не входит в ψ и T_0, откуда $(\psi[T/a])[b/a] \equiv \psi[T[b/a]/a]$ и $(T_0[T/a])[b/a] \equiv T_0[T[b/a]/a]$ (и аналогично для R), что по лемме 1.9 снова дает аксиому той же схемы. Если же $c \not\equiv a$, то без ограничения общности $c \not\equiv a, b$: действительно, при $c \equiv b$ достаточно выбрать свежую переменную $d \in$ FVar, не входящую в T_0, ψ, T, R и отличную от a, b, и переписать ту же аксиому с параметром d, поскольку $T_0[T/c] \equiv (T_0[d/c])[T/d]$, $\psi[T/c] \equiv (\psi[d/c])[T/d]$ (и аналогично для R и $[x/c]$). При $c \not\equiv a, b$ пословная замена $[b/a]$ коммутирует с $[x/c]$ и удовлетворяет $(\psi[T/c])[b/a] \equiv (\psi[b/a])[T[b/a]/c]$, $(T_0[T/c])[b/a] \equiv (T_0[b/a])[T[b/a]/c]$ (и аналогично для R); по лемме 1.9 $\psi[b/a] \in \mathrm{Form}_\Sigma$ (без x) и $T_0[b/a], T[b/a], R[b/a] \in \mathrm{Term}_\Sigma$, так что $\varphi[b/a] \in \mathrm{Ax}$. Наконец, $(T = T)[b/a] \equiv (T[b/a] = T[b/a]) \in \mathrm{Ax}$.
- *База гипотез* (**D2**): если $\varphi \trianglelefteq \Gamma$, то по определению покомпонентной замены $\varphi[b/a] \trianglelefteq \Gamma[b/a]$, откуда $\Gamma[b/a] \vdash \varphi[b/a]$.
- *Modus Ponens* (**D3**): если шаг переходит от χ и $\chi \to \varphi$ к φ, то по предположению индукции $\Gamma[b/a] \vdash \chi[b/a]$ и $\Gamma[b/a] \vdash \chi[b/a] \to \varphi[b/a]$, откуда правилом **D3** выводится $\Gamma[b/a] \vdash \varphi[b/a]$.
- *Правила Бернайса* (**D4**): рассмотрим шаг $\Gamma \vdash \chi_1 \to \forall x\, \chi_2[x/c]$ из посылки $\Gamma \vdash \chi_1 \to \chi_2$, где c не входит в Γ и χ_1, а x не входит в χ_2 (второе правило **D4** симметрично).
  - Если $c \equiv a$, то переменная a не входит ни в Γ, ни в χ_1, ни в $\forall x\, \chi_2[x/a]$. Следовательно, $\Gamma[b/a] \equiv \Gamma$ и $(\chi_1 \to \forall x\, \chi_2[x/a])[b/a] \equiv \chi_1 \to \forall x\, \chi_2[x/a]$, так что требуемый вывод доставляет исходный вывод $\mathcal{D}$.
  - Если $c \not\equiv a$ и $c \not\equiv b$, то по предположению индукции к подвыводу посылки имеем $\Gamma[b/a] \vdash \chi_1[b/a] \to \chi_2[b/a]$. Поскольку $c \not\equiv b$ и c не входит в Γ и χ_1, переменная c не входит в $\Gamma[b/a]$ и $\chi_1[b/a]$; переменная $x \in$ BVar не входит в $\chi_2[b/a]$. Правило **D4** дает $\Gamma[b/a] \vdash \chi_1[b/a] \to \forall x\, (\chi_2[b/a])[x/c]$. Так как $c \not\equiv a, b$ и $x \not\equiv a, b$, замены $[b/a]$ и $[x/c]$ коммутируют: $(\chi_2[b/a])[x/c] \equiv (\chi_2[x/c])[b/a]$, что и дает $\Gamma[b/a] \vdash (\chi_1 \to \forall x\, \chi_2[x/c])[b/a]$.
  - Если $c \equiv b$, то, поскольку b не входит ни в одну формулу вывода $\mathcal{D}$, переменная b не входит в χ_2, откуда $\chi_2[x/b] \equiv \chi_2$ и $(\chi_1 \to \forall x\, \chi_2[x/b])[b/a] \equiv \chi_1[b/a] \to \forall x\, \chi_2[b/a]$. По предположению индукции $\Gamma[b/a] \vdash \chi_1[b/a] \to \chi_2[b/a]$. Выбрав свежую переменную $e \in$ FVar, не входящую в $\Gamma[b/a]$, $\chi_1[b/a]$ и $\chi_2[b/a]$, и применив правило **D4** (с учетом $(\chi_2[b/a])[x/e] \equiv \chi_2[b/a]$), получаем $\Gamma[b/a] \vdash \chi_1[b/a] \to \forall x\, \chi_2[b/a]$. □

Следствие 2.8 (α-переименование связанных переменных)**.** *Для любой формулы* $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma$*, свободной переменной* $a \in$ FVar *и любых связанных переменных* $x, y \in$ BVar,

не входящих в φ, в исчислении выводимы эквивалентности

$$\vdash \forall x\, \varphi[x/a] \leftrightarrow \forall y\, \varphi[y/a], \qquad \vdash \exists x\, \varphi[x/a] \leftrightarrow \exists y\, \varphi[y/a].$$

В частности, для произвольной кванторной формулы $\mathsf{Q}x\,\chi$ и связанной переменной $y \in \mathrm{BVar}$, не входящей в χ, выполнено $\vdash \mathsf{Q}x\,\chi \leftrightarrow \mathsf{Q}y\,\chi[y/x]$.

Доказательство. По кванторной аксиоме **Ax2** (при $T \equiv a$) имеем $\vdash \forall x\, \varphi[x/a] \to \varphi$. Поскольку свободная переменная a не входит в $\forall x\, \varphi[x/a]$, а y не входит в φ, правило Бернайса **T3** дает $\vdash \forall x\, \varphi[x/a] \to \forall y\, \varphi[y/a]$. Симметрично выводится обратная импликация $\vdash \forall y\, \varphi[y/a] \to \forall x\, \varphi[x/a]$. Случай квантора $\exists$ двойственен (из $\vdash \varphi \to \exists y\, \varphi[y/a]$ по второму правилу **T3**). Второе утверждение получается выбором свободной переменной b, не входящей в χ: по предложению 1.8 (b) и лемме 1.9 формула $\varphi \equiv \chi[b/x]$ не содержит x и y, причем $\varphi[x/b] \equiv \chi$ и $\varphi[y/b] \equiv \chi[y/x]$. □

Определение 2.9 (α-эквивалентность формул)**.** Отношение *α-эквивалентности* $\varphi \approx \psi$ на Form_Σ определяется как наименьшее отношение эквивалентности, содержащее все пары вида $\mathsf{Q}x\,\chi \approx \mathsf{Q}y\,\chi[y/x]$ (где $\mathsf{Q}x\,\chi \in \mathrm{Form}_\Sigma$, а $y \in \mathrm{BVar}$ не входит в χ) и замкнутое относительно связок ($\varphi \approx \psi \implies \neg\varphi \approx \neg\psi$, $(\varphi \circ \chi) \approx (\psi \circ \chi)$, $(\chi \circ \varphi) \approx (\chi \circ \psi)$) и кванторного шага (если $\varphi \approx \psi$ и $x \in \mathrm{BVar}$ не входит в φ и ψ, то $\mathsf{Q}x\,\varphi[x/a] \approx \mathsf{Q}x\,\psi[x/a]$).

Лемма 2.10 (Доказуемая эквивалентность α-эквивалентных формул)**.** *Если $\varphi \approx \psi$, то $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.*

Доказательство. Индукция по порождению отношения $\approx$: рефлексивность, симметричность и транзитивность эквивалентности $\leftrightarrow$ даются пропозициональными тавтологиями, базовые пары $\mathsf{Q}x\,\chi \approx \mathsf{Q}y\,\chi[y/x]$ выводимы по следствию 2.8, а сохранение доказуемой эквивалентности при применении связок и кванторов обеспечивает предложение 2.13 (a). □

Предложение 2.11 (Связь с пустым контекстом)**.**

(a) $\mathrm{Thm}(\varphi)$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash \varphi$.

(b) *Если* $\mathrm{Thm}(\varphi)$, *то* $\Gamma \vdash \varphi$ *для всякого контекста* Γ.

Доказательство. Пункт (a) очевиден из совпадения правил **T1**–**T3** с правилами **D1**, **D3**, **D4** при пустом Γ (в который не входит ни одна свободная переменная). Пункт (b) является частным случаем монотонности (предложение 2.12 (a) при пустом исходном контексте, доказательство которого опирается только на лемму 2.7). □

Предложение 2.12 (Монотонность и теорема о дедукции)**.**

(a) (Монотонность по контексту.) *Если* $\Gamma \vdash \varphi$ *и всякая формула, входящая в* Γ, *входит в контекст* Δ, *то* $\Delta \vdash \varphi$.

(b) (Теорема о дедукции.) $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

Доказательство. (a) Проведем индукцию по длине вывода $\mathcal{D}$ утверждения $\Gamma \vdash \varphi$. Шаги **D1**–**D3** непосредственно переносятся в контекст Δ (при этом в **D2** из $\varphi \trianglelefteq \Gamma$ по условию следует $\varphi \trianglelefteq \Delta$). Пусть последний шаг — правило **D4**: $\Gamma \vdash \chi_1 \to \forall x\, \chi_2[x/a]$ из подвывода $\mathcal{D}'$ утверждения $\Gamma \vdash \chi_1 \to \chi_2$, где a не входит в Γ и χ_1, а x не входит в

χ_2 (второе правило **D4** симметрично). Выберем свободную переменную $b \in \mathrm{FVar}$, не входящую ни в одну формулу подвывода $\mathcal{D}'$ и списка Δ. По лемме 2.7, примененной к $\mathcal{D}'$ с заменой $[b/a]$, поскольку a не входит в Γ и χ_1, получаем вывод $\Gamma \vdash \chi_1 \to \chi_2[b/a]$ длины, не превосходящей длины $\mathcal{D}'$. По предположению индукции имеем $\Delta \vdash \chi_1 \to \chi_2[b/a]$. Так как b не входит в Δ и χ_1, а x не входит в $\chi_2[b/a]$, правило **D4** в контексте Δ дает $\Delta \vdash \chi_1 \to \forall x\,(\chi_2[b/a])[x/b]$. Поскольку b не входит в χ_2, имеем $(\chi_2[b/a])[x/b] \equiv \chi_2[x/a]$, то есть $\Delta \vdash \chi_1 \to \forall x\,\chi_2[x/a]$.

(b) Прямое утверждение доказывается индукцией по выводу $\Gamma, \varphi \vdash \psi$:

- если ψ есть аксиома или входит в Γ, то $\Gamma \vdash \psi$, а значит $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ (с помощью $\psi \to (\varphi \to \psi)$ и **D3**);
- если $\psi \equiv \varphi$, используется пропозициональная теорема $\varphi \to \varphi$;
- шаг **D3** обслуживается аксиомой Фреге;
- если $\psi \equiv \chi_1 \to \forall x\,\chi_2[x/a]$ получена по первому правилу **D4** из $\Gamma, \varphi \vdash \chi_1 \to \chi_2$ при условии, что a не входит в Γ, φ и χ_1, и невхождении x в χ_2, то по предположению индукции $\Gamma \vdash \varphi \to (\chi_1 \to \chi_2)$. С помощью пропозициональной тавтологии $(\varphi \to (\chi_1 \to \chi_2)) \to ((\varphi \wedge \chi_1) \to \chi_2)$ получаем $\Gamma \vdash (\varphi \wedge \chi_1) \to \chi_2$. Поскольку a не входит ни в Γ, ни в $\varphi \wedge \chi_1$, и x не входит в χ_2, правило **D4** в контексте Γ дает $\Gamma \vdash (\varphi \wedge \chi_1) \to \forall x\,\chi_2[x/a]$, откуда пропозициональной тавтологией $((\varphi \wedge \chi_1) \to \forall x\,\chi_2[x/a]) \to (\varphi \to (\chi_1 \to \forall x\,\chi_2[x/a]))$ выводится $\Gamma \vdash \varphi \to (\chi_1 \to \forall x\,\chi_2[x/a])$;
- если $\psi \equiv \exists x\,\chi_1[x/a] \to \chi_2$ получена по второму правилу **D4** из $\Gamma, \varphi \vdash \chi_1 \to \chi_2$ при условии, что a не входит в Γ, φ и χ_2, и невхождении x в χ_1, то по предположению индукции $\Gamma \vdash \varphi \to (\chi_1 \to \chi_2)$, откуда пропозициональной тавтологией следует $\Gamma \vdash \chi_1 \to (\varphi \to \chi_2)$. Так как a не входит ни в Γ, ни в $\varphi \to \chi_2$, и x не входит в χ_1, правило **D4** в контексте Γ дает $\Gamma \vdash \exists x\,\chi_1[x/a] \to (\varphi \to \chi_2)$, и перестановка посылок завершает шаг.

Обратное утверждение следует из пункта (a): если $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, то по пункту (a) $\Gamma, \varphi \vdash \varphi \to \psi$, а по **D2** $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$, откуда **D3** дает $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. □

Предложение 2.13 (Замена эквивалентных формул и свойства равенства)**.**

(a) *Если* $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$*, то:*

$$\vdash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi, \qquad \vdash (\varphi \circ \chi) \leftrightarrow (\psi \circ \chi), \qquad \vdash (\chi \circ \varphi) \leftrightarrow (\chi \circ \psi),$$

а для любой свободной переменной a и любой связанной переменной x, не входящей в φ и ψ:

$$\vdash \forall x\,\varphi[x/a] \leftrightarrow \forall x\,\psi[x/a], \qquad \vdash \exists x\,\varphi[x/a] \leftrightarrow \exists x\,\psi[x/a].$$

(b) (Симметричность и транзитивность равенства.) *Для любых термов $T, R, T_1, T_2, T_3 \in \mathrm{Term}_\Sigma$ в исчислении выводимы формулы*

$$(T = R) \to (R = T), \qquad (T_1 = T_2) \to ((T_2 = T_3) \to (T_1 = T_3)).$$

Доказательство. (a) Для пропозициональных связок утверждение получается прямой подстановкой формул ИП в соответствующие пропозициональные теоремы ИВ ($(p \leftrightarrow q) \to (\neg p \leftrightarrow \neg q)$, $(p \leftrightarrow q) \to ((p \circ r) \leftrightarrow (q \circ r))$ и $(p \leftrightarrow q) \to ((r \circ p) \leftrightarrow (r \circ q))$), переходящие в теоремы ИП по группе **Ax1** и правилу **T2**. Для $\forall$: из $\vdash \varphi \to \psi$ и кванторной аксиомы $\forall x\, \varphi[x/a] \to \varphi$ (при $T \equiv a$) получается $\vdash \forall x\, \varphi[x/a] \to \psi$, откуда по первому правилу **T3** (так как a не входит в $\forall x\, \varphi[x/a]$ и x не входит в ψ) следует $\vdash \forall x\, \varphi[x/a] \to \forall x\, \psi[x/a]$; симметрично выводится обратная импликация. Для $\exists$ применяется аксиома $\psi \to \exists x\, \psi[x/a]$ и второе правило **T3**.

(b) Для симметричности выберем свободную переменную a, не входящую в T и применим схему конгруэнтности для формул к $\varphi \equiv (a = T)$: получаем $(T = R) \to ((T = T) \to (R = T))$, откуда вместе с аксиомой $T = T$ следует $(T = R) \to (R = T)$. Для транзитивности выберем a, не входящую в T_3 и применим ту же схему к $\varphi \equiv (a = T_3)$ в паре (T_2, T_1): получаем $(T_2 = T_1) \to ((T_2 = T_3) \to (T_1 = T_3))$, что в сочетании с симметричностью $(T_1 = T_2) \to (T_2 = T_1)$ дает $(T_1 = T_2) \to ((T_2 = T_3) \to (T_1 = T_3))$. □

2.4. Теории первого порядка

Сохраняя за метапеременными Γ, Δ обозначение конечных списков формул (§ 2.3), закрепим прямые прописные буквы A, B за произвольными (не обязательно конечными) множествами формул сигнатуры Σ. Для множества формул $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Form}_\Sigma$ пишут $\mathrm{A} \vdash \varphi$ (или $\mathrm{A} \vdash_\Sigma \varphi$, если требуется явно указать сигнатуру), если найдется конечный список Γ формул из A (возможно, пустой), для которого $\Gamma \vdash \varphi$ в смысле определения 2.6. В силу конечности всякого вывода это отношение финитарно, а по предложению 2.12 оно монотонно по A и удовлетворяет теореме о дедукции: $\mathrm{A} \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{A} \vdash \varphi \to \psi$.

Определение 2.14 (Дедуктивное замыкание и непротиворечивость)**.** Пусть Σ — фиксированная сигнатура, а $\mathrm{Sent}_\Sigma \subseteq \mathrm{Form}_\Sigma$ — множество всех предложений (замкнутых формул) сигнатуры Σ.

(a) *Дедуктивным замыканием* множества формул $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Form}_\Sigma$ (в частности, множества предложений $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Sent}_\Sigma$) в сигнатуре Σ называется множество всех выводимых из A предложений:

$$[\mathrm{A}]_\Sigma \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{\varphi \in \mathrm{Sent}_\Sigma \mid \mathrm{A} \vdash \varphi\}.$$

(b) Множество формул $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Form}_\Sigma$ называется *непротиворечивым*, если не существует формулы $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma$, для которой одновременно $\mathrm{A} \vdash \varphi$ и $\mathrm{A} \vdash \neg\varphi$ (при $\mathrm{Sent}_\Sigma \neq \emptyset$ в силу пропозициональной тавтологии $p \to (\neg p \to q)$ это равносильно условию $[\mathrm{A}]_\Sigma \neq \mathrm{Sent}_\Sigma$; при этом $\mathrm{Sent}_\Sigma \neq \emptyset$ как в ИП с равенством, содержащем $\forall x\, (x = x)$, так и в ИП без равенства при $\mathrm{Pred}_\Sigma \neq \emptyset$, где имеется $\forall x\, P(x, \ldots, x)$), и *противоречивым* в противном случае.

Поскольку по определению $[\mathrm{A}]_\Sigma \subseteq \mathrm{Sent}_\Sigma$, при наличии в $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Form}_\Sigma$ формул со свободными переменными включение $\mathrm{A} \subseteq [\mathrm{A}]_\Sigma$ не имеет места (выполнено лишь $\mathrm{A} \cap \mathrm{Sent}_\Sigma \subseteq [\mathrm{A}]_\Sigma$). В теории моделей и аксиоматических теориях, как правило, ограничиваются множествами предложений $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Sent}_\Sigma$: для них всегда $\mathrm{A} \subseteq [\mathrm{A}]_\Sigma$ и $[\mathrm{A}]_\Sigma = [[\mathrm{A}]_\Sigma]_\Sigma$ (операция замыкания идемпотентна).

Определение 2.15 (Теория и аксиоматика)**.**

(a) *Теорией* (первого порядка) в сигнатуре Σ называется непротиворечивое дедуктивно замкнутое множество предложений $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Sent}_\Sigma$ (то есть $[\mathcal{T}]_\Sigma = \mathcal{T}$ и $\mathcal{T} \neq \mathrm{Sent}_\Sigma$). Элементы множества $\mathcal{T}$ называются *теоремами* теории $\mathcal{T}$.

(b) Для теории $\mathcal{T}$ произвольное подмножество $\mathrm{A} \subseteq \mathcal{T}$, удовлетворяющее равенству $\mathcal{T} = [\mathrm{A}]_\Sigma$, называется *аксиоматикой* (или *системой аксиом*) теории $\mathcal{T}$, а элементы множества A — *нелогическими аксиомами* данной аксиоматизации. Теория $\mathcal{T}$ называется *конечно аксиоматизируемой*, если она обладает конечной аксиоматикой.

Для произвольного множества предложений $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Sent}_\Sigma$ его дедуктивное замыкание $[\mathrm{A}]_\Sigma$ является теорией тогда и только тогда, когда A непротиворечиво. Всякая теория $\mathcal{T}$ автоматически непуста, поскольку дедуктивная замкнутость влечет $[\emptyset]_\Sigma \subseteq \mathcal{T}$: любая логическая теорема, являющаяся предложением, принадлежит $\mathcal{T}$. Непротиворечивость множества $[\emptyset]_\Sigma$ (служившего тем самым наименьшей по включению теорией в сигнатуре Σ) устанавливается чисто финитарно: определим на Form_Σ оценку $v(\varphi) \in \{0, 1\}$ рекурсией по числу связок и кванторов (на основании предложения 1.8 и леммы 1.9), стирая термы и кванторы: положим $v(\varphi) = 1$ для всякой атомарной формулы, вычислим связки $\neg, \wedge, \vee, \to$ по таблицам истинности на $\{0, 1\}$, а для кванторных формул положим $v(\mathsf{Q}x\,\chi) = v(\chi[b/x])$, где $b \in \mathrm{FVar}$ — кратчайшая свободная переменная, не входящая в χ. Совместной индукцией по числу связок и кванторов в формуле φ проверяются два свойства: (1) для любой кванторной формулы $\mathsf{Q}x\,\chi$ значение $v(\chi[c/x])$ не зависит от выбора $c \in \mathrm{FVar}$, не входящей в χ (поскольку $\chi[c/x] \equiv (\chi[b/x])[c/b]$, к формуле $\chi[b/x]$ меньшей сложности применимо второе свойство), и (2) $v(\varphi[T/a]) = v(\varphi)$ для любых $T \in \mathrm{Term}_\Sigma$ и $a \in \mathrm{FVar}$ (для атомарной формулы $\varphi[T/a]$ остается атомарной, связки сохраняются по предположению индукции, а для $\mathsf{Q}y\,\chi$ выбор свежей $c \notin \chi, T, a$ дает $(\chi[T/a])[c/y] \equiv (\chi[c/y])[T/a]$, откуда по предположению индукции и свойству (1) $v((\mathsf{Q}y\,\chi)[T/a]) = v((\chi[c/y])[T/a]) = v(\chi[c/y]) = v(\mathsf{Q}y\,\chi)$). В частности, для кванторных аксиом **Ax2** имеем $v(\forall x\,\psi[x/a]) = v(\psi) = v(\psi[T/a])$ (и аналогично для $\exists$), поэтому всякая аксиома групп **Ax1**–**Ax3** получает значение 1, а правила **T2**–**T3** сохраняют значение 1. Следовательно, $v(\theta) = 1$ для всех θ с $\mathrm{Thm}(\theta)$, тогда как $v(\neg\theta) = 0$ (в частности, для любой формулы $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma$ имеем $v(\varphi \to \varphi) = 1$ и $v(\neg(\varphi \to \varphi)) = 0$, так что $\neg(\varphi \to \varphi)$ невыводима).

Отделение нелогических аксиом от самой теории как порождающего множества подчеркивает, что одна и та же теория допускает различные аксиоматики; при этом независимость аксиом (требование, чтобы ни одна аксиома $\alpha \in \mathrm{A}$ не была выводима из $\mathrm{A} \setminus \{\alpha\}$) в определении аксиоматики не предполагается, что упрощает сопоставление различных систем аксиом и теорий (в частности, сама теория $\mathcal{T}$ служит собственной аксиоматикой). Если $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Sent}_\Sigma$ и формула $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma$ содержит свободные переменные $a_1, \ldots, a_k$, то по правилу обобщения (предложение 2.4) и аксиоме $\forall$-удаления выводимость $\mathrm{A} \vdash \varphi$ равносильна выводимости ее универсального замыкания $\mathrm{A} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \varphi[x_1/a_1] \ldots [x_k/a_k]$. Поэтому в нелогических аксиомах открытую формулу нередко записывают как стандартное сокращение ее универсального замыкания.

Определение 2.16 (Дедуктивно полная теория)**.** Теория $\mathcal{T}$ в сигнатуре Σ называется *дедуктивно полной* (или просто *полной*), если для всякого предложения $\varphi \in \mathrm{Sent}_\Sigma$ либо $\varphi \in \mathcal{T}$, либо $\neg\varphi \in \mathcal{T}$.

Пример 2.17 (Примеры теорий первого порядка)**.**

(1) *Чистое равенство и аксиомы мощности.* В пустой сигнатуре $\Sigma = \emptyset$ единственным атомарным предикатом служит равенство $=$. Для каждого $n \geq 2$ предложение

$$\alpha_{\geq n} \overset{\text{def}}{\rightleftharpoons} \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j)$$

выражает существование не менее n различных элементов, а $\beta_{=n} \overset{\text{def}}{\rightleftharpoons} \alpha_{\geq n} \wedge \neg\alpha_{\geq n+1}$ (при $n = 1$: $\beta_{=1} \overset{\text{def}}{\rightleftharpoons} \neg\alpha_{\geq 2}$) — ровно n элементов. Каждое из одноэлементных множеств $\{\beta_{=n}\}$ ($n \geq 1$), а также множество $\{\alpha_{\geq n} \mid n \geq 2\}$ непротиворечивы, а порождаемые ими теории $[\{\beta_{=n}\}]_\emptyset$ и $\mathrm{Th}_\infty \overset{\text{def}}{\rightleftharpoons} [\{\alpha_{\geq n} \mid n \geq 2\}]_\emptyset$ (теория бесконечных множеств) дедуктивно полны (методом элиминации кванторов всякое предложение в $\Sigma = \emptyset$ приводится к булевой комбинации предложений $\alpha_{\geq k}$; см., напр., Кейслер, Чанг, 1977; Шенфилд, 1975), тогда как чистая логика равенства $[\emptyset]_\emptyset$ неполна (ни $\alpha_{\geq 2}$, ни $\neg\alpha_{\geq 2}$ в ней не выводимы). При этом теория Th_∞ не является конечно аксиоматизируемой (по теореме компактности, которая будет получена далее в разделе 3, замечание 3.6).

(2) *Плотный линейный порядок без концевых элементов* (DLO). Сигнатура $\Sigma = \{<\}$ состоит из одного двуместного предикатного символа (записываемого инфиксно). Аксиомами служат шесть предложений: иррефлексивность $\forall x\, \neg(x < x)$, транзитивность $\forall x \forall y \forall z\, ((x < y \wedge y < z) \to x < z)$, линейность $\forall x \forall y\, (x < y \vee x = y \vee y < x)$, плотность $\forall x \forall y\, (x < y \to \exists z\, (x < z \wedge z < y))$ и отсутствие наименьшего и наибольшего элементов $\forall x\, \exists y\, (y < x)$, $\forall x\, \exists y\, (x < y)$. Эта система аксиом непротиворечива, а порождаемая ею теория DLO конечно аксиоматизируема и дедуктивно полна (Кейслер, Чанг, 1977).

(3) *Абелевы группы без кручения.* В сигнатуре $\Sigma = \{+, 0\}$ (бинарный функциональный символ и константа) к аксиомам абелевой группы

$$\forall x \forall y \forall z\, ((x + y) + z = x + (y + z)), \qquad \forall x\, (x + 0 = x),$$
$$\forall x\, \exists y\, (x + y = 0), \qquad \forall x \forall y\, (x + y = y + x)$$

добавляется бесконечная серия аксиом отсутствия кручения $\forall x\, (n{\cdot}x = 0 \to x = 0)$ для всех $n \geq 2$, где $n \cdot T$ обозначает n-кратную сумму $T + \cdots + T$. Эта теория неполна (в ней независимо предложение $\exists x\, \neg(x = 0)$); однако присоединение аксиомы нетривиальности $\exists x\, \neg(x = 0)$ и схемы делимости $\forall x\, \exists y\, (n{\cdot}y = x)$ ($n \geq 2$) дает полную теорию нетривиальных делимых абелевых групп без кручения (Кейслер, Чанг, 1977; Шенфилд, 1975).

(4) *Аксиоматическая теория множеств* (ZFC). Сигнатура $\Sigma = \{\in\}$ содержит единственный двуместный предикатный символ принадлежности и не содержит ни констант, ни функциональных символов. Система нелогических аксиом ZFC включает аксиомы экстенсиональности, пары, объединения, степени, бесконечности, регулярности (основания), аксиому выбора, а также схемы аксиом выделения и подстановки; при допущении непротиворечивости ($\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC})$) замыкание этой системы аксиом является теорией в смысле определения 2.15. Единственными термами языка $\mathrm{Term}_{\{\in\}}$ являются свободные переменные, так что стандартные обозначения $\emptyset$, $\{a, b\}$, $\mathcal{P}(a)$, $a \subseteq b$ формально не принадлежат исходной сигнатуре и вводятся посредством дефинициальных расширений.

2.5. Дефинициальные расширения языка и теорий

Построение содержательных теорий в минимальной сигнатуре (такой, как $\{\in\}$ в теории множеств или $\{0, S, +, \cdot\}$ в арифметике) требует введения новых символов — предикатов, функций и констант — как сокращений выражений исходного языка. В то время как новый предикатный символ всегда задается формулой, для введения функционального символа или константы требуется, чтобы соответствующее условие однозначно определяло элемент в теории.

Для сокращения записи используется квантор единственности существования: для формулы $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma$, свободной переменной a и различных связанных переменных $x, y \in \mathrm{BVar}$, не входящих в φ, полагается

$$\exists! x\, \varphi[x/a] \stackrel{\text{def}}{\rightleftharpoons} \exists x \big(\varphi[x/a] \wedge \forall y\, (\varphi[y/a] \to y = x)\big).$$

Определение 2.18 (Дефинициальное расширение)**.** Пусть $\mathcal{T}$ — теория в сигнатуре Σ, и пусть $\Sigma' = \Sigma \cup \{S\}$ — расширение сигнатуры свежим нелогическим символом S (константой или шаблоном), головное имя которого не встречается в Σ (так что Σ' сохраняет свойство антицепи, определение 1.3). *Дефинициальным расширением* теории $\mathcal{T}$ за счет символа S называется теория $\mathcal{T}' = [\mathcal{T} \cup \{\alpha_S\}]_{\Sigma'}$ в сигнатуре Σ', где определяющая аксиома $\alpha_S \in \mathrm{Sent}_{\Sigma'}$ имеет один из следующих трех видов (в зависимости от рода символа S, при этом связанные переменные $x_1, \ldots, x_n, y \in \mathrm{BVar}$ попарно различны и не входят в определяющую формулу $\chi \in \mathrm{Form}_\Sigma$):

(1) *Введение предикатного символа* $Q(a_1, \ldots, a_n)$: для произвольной формулы $\chi \in \mathrm{Form}_\Sigma$, в которую не входят свободные переменные, отличные от $a_1, \ldots, a_n$, полагается

$$\alpha_Q \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_n \big(Q(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \chi[x_1/a_1] \ldots [x_n/a_n]\big).$$

(2) *Введение функционального символа* $F(a_1, \ldots, a_n)$ ($n \geq 1$): пусть $\chi \in \mathrm{Form}_\Sigma$ — формула, все свободные переменные которой содержатся среди $a_1, \ldots, a_n, b$, причем в теории $\mathcal{T}$ выводимо условие существования и единственности

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, \exists! y\, \chi[x_1/a_1] \ldots [x_n/a_n][y/b] \in \mathcal{T}.$$

Тогда полагается

$$\alpha_F \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y \big(F(x_1, \ldots, x_n) = y \leftrightarrow \chi[x_1/a_1] \ldots [x_n/a_n][y/b]\big).$$

В силу $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, \exists! y\, \chi[x_1/a_1] \ldots [x_n/a_n][y/b] \in \mathcal{T}$ эта аксиома дедуктивно эквивалентна предложению $\beta_F \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_n\, \chi[x_1/a_1] \ldots [x_n/a_n][F(x_1, \ldots, x_n)/b]$.

(3) *Введение константы* C: частный случай пункта (2) при $n = 0$. Если все свободные переменные формулы $\chi \in \mathrm{Form}_\Sigma$ содержатся среди b (то есть сводятся к одной переменной b или отсутствуют) и $\exists! y\, \chi[y/b] \in \mathcal{T}$, то

$$\alpha_C \equiv \forall y \big(C = y \leftrightarrow \chi[y/b]\big),$$

что над $\mathcal{T}$ эквивалентно предложению $\beta_C \equiv \chi[C/b]$.

Итерированным дефинициальным расширением называется объединение конечной или счетной возрастающей цепи теорий $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \subseteq \ldots$, в которой каждый шаг $\mathcal{T}_{k+1}$ есть дефинициальное расширение теории $\mathcal{T}_k$.

Замечание 2.19 (Переобозначение термов и распространение конгруэнтности)**.** Частым источником новых функциональных символов и констант служит *явное переобозначение терма*: пусть $T \in \mathrm{Term}_\Sigma$ содержит лишь свободные переменные из списка $a_1, \ldots, a_n$ ($n \geq 0$), и требуется ввести символ $F(a_1, \ldots, a_n)$ (или константу C при $n = 0$) в качестве сокращения для T. Этот случай укладывается в пункт (2) определения 2.18 при $\chi \equiv (b = T)$ (где b не входит в T): условие $\forall x_1 \ldots \forall x_n \, \exists! y \, (y = T[x_1/a_1] \ldots [x_n/a_n])$ выводится чисто логически (для пустой теории $[\emptyset]_\Sigma$) из рефлексивности, симметричности и транзитивности равенства, а аксиома α_F эквивалентна

$$\beta_F \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_n \left(F(x_1, \ldots, x_n) = T[x_1/a_1] \ldots [x_n/a_n]\right).$$

Появление нового символа S в сигнатуре Σ' мгновенно расширяет классы $\mathrm{Term}_{\Sigma'}$ и $\mathrm{Form}_{\Sigma'}$: в частности, символ F может входить в составные термы на любой глубине и в аргументы произвольных предикатов. Чтобы подобное переобозначение действительно допускало подмену F на T (и обратно) в любом контексте, на новый символ должна распространяться конгруэнтность равенства. В принятой в определении 2.1 формулировке исчисления предикатов схемы конгруэнтности **Ax3** относятся ко всем термам и формулам текущей сигнатуры, поэтому при переходе от Σ к Σ' аксиомы

$$(R_1 = R_1' \wedge \cdots \wedge R_n = R_n') \to \left(F(R_1, \ldots, R_n) = F(R_1', \ldots, R_n')\right)$$

сразу входят в логические аксиомы языка Σ' (в атомарном задании из замечания 2.2 та же импликация выводится из конгруэнтности для T, а в общем случае определения 2.18 (2) — из конгруэнтности для χ и единственности). В совокупности со схемой **Ax3** для формул $\varphi \in \mathrm{Form}_{\Sigma'}$ определяющая аксиома α_F влечет

$$\mathcal{T}' \vdash_{\Sigma'} \varphi[F(R_1, \ldots, R_n)/c] \leftrightarrow \varphi[T[R_1/a_1] \ldots [R_n/a_n]/c]$$

для любых термов $R_1, \ldots, R_n \in \mathrm{Term}_{\Sigma'}$ и свободной переменной c, так что новое обозначение и замещаемый им терм взаимозаменимы в любой формуле расширенного языка.

Следующая теорема показывает, что дефинициальное расширение не только позволяет перевести любую формулу расширенного языка обратно в исходный язык Σ, но и не порождает никаких новых теорем в старом языке.

Теорема 2.20 (Об устранимости и консервативности дефинициальных расширений)**.** *Пусть $\mathcal{T}' = [\mathcal{T} \cup \{\alpha_S\}]_{\Sigma'}$ — дефинициальное расширение теории $\mathcal{T}$ сигнатуры Σ (определение 2.18), и пусть $\mathrm{FV}(\psi)$ обозначает множество всех свободных переменных, входящих в формулу ψ. Существует конструктивное отображение $\varphi \mapsto \varphi^*$ из $\mathrm{Form}_{\Sigma'}$ в Form_Σ, не добавляющее новых свободных переменных ($\mathrm{FV}(\varphi^*) \subseteq \mathrm{FV}(\varphi)$) и обладающее следующими свойствами:*

(a) $\varphi^* \equiv \varphi$ *для всякой формулы* $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma$*;*

(b) $\mathcal{T} \cup \{\alpha_S\} \vdash_{\Sigma'} \varphi \leftrightarrow \varphi^*$ *для всякой формулы* $\varphi \in \mathrm{Form}_{\Sigma'}$*;*

(c) (синтаксическая консервативность) *для всякого предложения* $\varphi \in \mathrm{Sent}_\Sigma$

$$\varphi \in \mathcal{T}' \iff \varphi \in \mathcal{T}.$$

Доказательство. Сначала зададим канонический перевод $\varphi \mapsto \varphi^* \in \mathrm{Form}_\Sigma$. Для формулы $\varphi \in \mathrm{Form}_{\Sigma'}$ переименуем связанные переменные в определяющей формуле χ (внутри α_S) в кратчайшие переменные из BVar, не входящие в φ: по лемме 2.10 это не меняет χ с точностью до доказуемой эквивалентности. Далее определение ψ^* для подформул ψ формулы φ ведется рекурсией по построению ψ (с фиксированной переименованной формулой χ, а в функциональном случае — с выбором кратчайшей свежей переменной $y \in \mathrm{BVar}$, не входящей в φ, χ и уже переведенную часть):

- Если S есть предикатный символ Q, то в атомарной формуле полагаем $Q(R_1, \ldots, R_n)^* \equiv \chi[R_1/a_1] \ldots [R_n/a_n]$ (при этом $R_i \in \mathrm{Term}_\Sigma$), а остальные атомарные формулы оставляем без изменений.

- Если S есть функциональный символ F (или константа C, рассматриваемая как случай $n = 0$), то всякая атомарная формула $\psi \in \mathrm{Form}_{\Sigma'}$, содержащая символ F, имеет по крайней мере одно самое внутреннее вхождение $F(R_1, \ldots, R_n)$ (где $R_1, \ldots, R_n \in \mathrm{Term}_\Sigma$ не содержат F). Выбрав первое такое вхождение, представим $\psi \equiv \psi_0[F(R_1, \ldots, R_n)/c]$ для кратчайшей свободной переменной c, не входящей в ψ и в χ, и кратчайшей связанной переменной $y \in \mathrm{BVar}$, не входящей в φ, χ и ψ_0^*, и заменим ψ на формулу

  $$\exists y \, \big(\chi[R_1/a_1] \ldots [R_n/a_n][y/b] \wedge \psi_0^*[y/c]\big),$$

  в которой формула ψ_0 содержит на одно вхождение F меньше (так что рекурсия по числу вхождений F в атомарную формулу обрывается; при F, не входящем в атом ψ, полагаем $\psi^* \equiv \psi$). В частном случае явного переобозначения терма $F(a_1, \ldots, a_n) = T$ (замечание 2.19) этот шаг равносилен прямой пословной замене $F(R_1, \ldots, R_n)$ на $T[R_1/a_1] \ldots [R_n/a_n]$ внутри термов атомарной формулы.

- На связки и кванторы перевод продолжается канонически (независимо от выбора представления кванторной формулы):

  $$(\neg\psi)^* \equiv \neg(\psi^*), \qquad (\psi_1 \circ \psi_2)^* \equiv (\psi_1^* \circ \psi_2^*), \qquad (\mathsf{Q}x\,\psi)^* \equiv \mathsf{Q}x\,\big((\psi[b/x])^*\big)[x/b],$$

  где $b \in \mathrm{FVar}$ — кратчайшая свободная переменная, не входящая в ψ (по предложению 1.8 (b) и лемме 1.9 $\psi[b/x] \in \mathrm{Form}_\Sigma$ имеет меньшую сложность; поскольку все вновь вводимые связанные переменные из χ и y выбираются вне φ, в том числе отличными от x, переменная x не входит в $(\psi[b/x])^*$).

Поскольку выбор свежих связанных переменных в χ и y зависит от всей переводимой формулы φ, для подформул ψ_1, ψ_2 одной формулы φ их собственные переводы могут отличаться от переводов внутри φ лишь переименованием свежих связанных переменных. Тем самым, по индукции и определению 2.9, перевод согласован со связками, кванторами и заменой свободных переменных с точностью до α-эквивалентности ($\approx$): $(\neg\psi)^* \approx \neg(\psi^*)$, $(\psi_1 \circ \psi_2)^* \approx (\psi_1^* \circ \psi_2^*)$, $(\mathsf{Q}x\,\psi_0[x/a])^* \approx \mathsf{Q}x\,(\psi_0^*)[x/a]$ и $(\psi[b/a])^* \approx (\psi^*)[b/a]$ (в кванторном равенстве при $b \notin \psi_0[x/a]$ имеем $b \notin \psi_0^*$ ввиду $\mathrm{FV}(\psi_0^*) \subseteq \mathrm{FV}(\psi_0)$, откуда $((\psi_0^*)[b/a])[x/b] \equiv (\psi_0^*)[x/a]$). С точностью до $\approx$ перевод не зависит от выбора свежих переменных.

Утверждение (a) очевидно из конструкции: формулы из Form_Σ не содержат символа S. Включение $\mathrm{FV}(\varphi^*) \subseteq \mathrm{FV}(\varphi)$ следует из того, что в χ входят лишь свободные переменные из $a_1, \ldots, a_n$ (и b, закрываемая квантором $\exists y$), а подстановки термов R_i содержат лишь переменные из φ. Равенство $\mathrm{FV}(\varphi^*) = \mathrm{FV}(\varphi)$ в общем случае не имеет места: например, при $\chi \equiv \forall z\,(z = z)$ формула $Q(a)^* \equiv \forall z\,(z = z)$ уже не содержит переменной a.

Утверждение (b) проверяется индукцией по построению формулы φ (в функциональном случае — с вложенной индукцией по числу вхождений F в атомарную формулу). Для атомарной формулы $Q(R_1, \ldots, R_n)$ эквивалентность $Q(R_1, \ldots, R_n) \leftrightarrow \chi[R_1/a_1] \ldots [R_n/a_n]$ получается подстановкой термов $R_1, \ldots, R_n$ в аксиому α_Q (по схеме $\forall$-удаления). Для атомарной формулы $\psi \equiv \psi_0[F(R_1, \ldots, R_n)/c]$ аксиома α_F дает эквивалентность

$$\mathcal{T} \cup \{\alpha_F\} \vdash_{\Sigma'} \forall y\,\big(F(R_1, \ldots, R_n) = y \leftrightarrow \chi[R_1/a_1] \ldots [R_n/a_n][y/b]\big).$$

Из рефлексивности $F(R_1, \ldots, R_n) = F(R_1, \ldots, R_n)$ и этой эквивалентности выводится $\psi \to \exists y\,(\chi[R_1/a_1] \ldots [R_n/a_n][y/b] \wedge \psi_0[y/c])$; обратно, из $\chi[\bar{R}/\bar{a}][y/b] \wedge \psi_0[y/c]$ следует $F(\bar{R}) = y$, откуда по схеме конгруэнтности **Ax3** для формул выводится $\psi_0[F(\bar{R})/c] \equiv \psi$. Замена ψ_0 на ψ_0^* обеспечивается предположением вложенной индукции, предложением 2.13 (a) и леммой 2.10; теми же результатами шаг перехода по связкам и кванторам сохраняет эквивалентность (с переходом от $\neg(\psi_1^*)$, $\psi_1^* \circ \psi_2^*$, $\mathsf{Q}x\,(\psi_0^*)[x/a]$ к $(\neg\psi_1)^*$, $(\psi_1 \circ \psi_2)^*$, $(\mathsf{Q}x\,\psi_0[x/a])^*$ по лемме 2.10).

Для доказательства (c) достаточно показать, что из $\mathcal{T} \cup \{\alpha_S\} \vdash_{\Sigma'} \psi$ следует $\mathcal{T} \vdash_\Sigma \psi^*$ для любой формулы $\psi \in \mathrm{Form}_{\Sigma'}$ (тогда для $\varphi \in \mathrm{Sent}_\Sigma$ свойство (a) дает $\varphi^* \equiv \varphi$, откуда $\mathcal{T} \vdash_\Sigma \varphi$, то есть $\varphi \in \mathcal{T}$). Проведем индукцию по выводу из $\mathcal{T} \cup \{\alpha_S\}$ в языке Σ':

- *Гипотезы и аксиома* α_S. Если $\psi \in \mathcal{T}$, то $\psi^* \equiv \psi \in \mathcal{T}$. Для $\psi \equiv \alpha_Q$ формула $\alpha_Q^* \approx \forall x_1 \ldots \forall x_n\,(\chi[\bar{x}/\bar{a}] \leftrightarrow \chi[\bar{x}/\bar{a}])$ является логической теоремой (по лемме 2.10). Для $\psi \equiv \alpha_F$ перевод $(F(\bar{x}) = y)^*$ эквивалентен в $\mathcal{T}$ формуле $\chi[\bar{x}/\bar{a}][y/b]$ (в силу $\forall \bar{x}\,\exists! z\,\chi[\bar{x}/\bar{a}][z/b] \in \mathcal{T}$: именно $\exists z\,(\chi[\bar{x}/\bar{a}][z/b] \wedge z = y) \leftrightarrow \chi[\bar{x}/\bar{a}][y/b]$), поэтому $\mathcal{T} \vdash_\Sigma \alpha_F^*$.

- *Правила вывода.* Если $\mathcal{T} \vdash_\Sigma \psi_1^*$ и $\mathcal{T} \vdash_\Sigma (\psi_1 \to \psi_2)^*$, то ввиду $(\psi_1 \to \psi_2)^* \approx (\psi_1^* \to \psi_2^*)$ и леммы 2.10 имеем $\mathcal{T} \vdash_\Sigma \psi_1^* \to \psi_2^*$, откуда Modus Ponens дает $\mathcal{T} \vdash_\Sigma \psi_2^*$. Правила Бернайса (с учетом условия на свободные переменные) также сохраняются: из $\mathrm{FV}(\psi^*) \subseteq \mathrm{FV}(\psi)$ следует, что невхождение свободной переменной a сохраняется при переводе, а соотношения $(\chi_1 \to \chi_2)^* \approx (\chi_1^* \to \chi_2^*)$ и $(\chi_1 \to \forall x\,\chi_2[x/a])^* \approx \chi_1^* \to \forall x\,(\chi_2^*)[x/a]$ (и аналогично для $\exists$; при необходимости с переименованием переменной x в χ_1^*, χ_2^* по лемме 2.10, если она встретилась в свежих переменных перевода) позволяют применить правило Бернайса и вернуться к переводу заключения по лемме 2.10.

- *Логические аксиомы.* Для пропозициональной аксиомы $\mathcal{A}[\psi_1/p][\psi_2/q][\psi_3/r]$ ее перевод α-эквивалентен аксиоме $\mathcal{A}[\psi_1^*/p][\psi_2^*/q][\psi_3^*/r]$ и потому выводим в $\mathcal{T}$ по лемме 2.10. В предикатном случае $S = Q$ имеем $\mathrm{Term}_{\Sigma'} = \mathrm{Term}_\Sigma$, и индукцией по сложности $\psi \in \mathrm{Form}_{\Sigma'}$ проверяется $(\psi[T/a])^* \approx \psi^*[T/a]$ для любых $T \in \mathrm{Term}_\Sigma$ и $a \in \mathrm{FVar}$, откуда переводы аксиом **Ax2** и **Ax3** α-эквивалентны аксиомам тех же схем в языке Σ и выводимы по лемме 2.10. В функциональном случае $S = F$ (или константы C при $n = 0$) выберем свежую свободную переменную $d \in \mathrm{FVar}$,

не входящую в T, R, T_0, ψ, χ и отличную от $a_1, \ldots, a_n, b$, и свежие связанные переменные $z_1, \ldots, z_n, y \in \mathrm{BVar}$, и сопоставим каждому терму $T \in \mathrm{Term}_{\Sigma'}$ формулу $\varphi_T(d) \in \mathrm{Form}_\Sigma$, выражающую равенство $d = T$: для $T \in \mathrm{Term}_\Sigma$ полагается $\varphi_T(d) \equiv (d = T)$, а для составного терма $F(R_1, \ldots, R_n)$ —

$$\varphi_{F(R_1,\ldots,R_n)}(d) \equiv \exists z_1 \ldots \exists z_n \left(\varphi_{R_1}[z_1/d] \wedge \cdots \wedge \varphi_{R_n}[z_n/d] \wedge \chi[z_1/a_1] \ldots [z_n/a_n][d/b]\right)$$

(при $n = 0$ для константы C полагается $\varphi_C(d) \equiv \chi[d/b]$). Далее проверка распадается на три шага:

1) Структурной индукцией по $T \in \mathrm{Term}_{\Sigma'}$ из условия $\forall \bar{x}\, \exists! y\, \chi[\bar{x}/\bar{a}][y/b] \in \mathcal{T}$ и конгруэнтности равенства в Σ выводится $\mathcal{T} \vdash_\Sigma \exists! y\, \varphi_T[y/d]$.
2) Ввиду $\mathcal{T} \vdash_\Sigma \exists! y\, \varphi_T[y/d]$ формула $\exists y\, (\varphi_T[y/d] \wedge \theta[y/a])$ эквивалентна в $\mathcal{T}$ формуле $\forall y\, (\varphi_T[y/d] \to \theta[y/a])$ и потому перестановочна в $\mathcal{T}$ со всеми связками $\neg, \wedge, \vee, \to$ и кванторами $\forall, \exists$. В сочетании с вложенной индукцией по числу вхождений F для атомарных формул (где единственность $\exists! z\, \varphi_R[z/d]$ позволяет отождествлять свидетелей для разных вхождений a) это дает индукцией по сложности $\psi \in \mathrm{Form}_{\Sigma'}$ эквивалентность

$$\mathcal{T} \vdash_\Sigma (\psi[T/a])^* \leftrightarrow \exists y \left(\varphi_T[y/d] \wedge \psi^*[y/a]\right)$$

(при $y \in \mathrm{BVar}$, не входящей в ψ^* и φ_T).
3) Из (1) и (2) следуют переводы всех схем **Ax2** и **Ax3**: $(T = T)^*$ эквивалентна в $\mathcal{T}$ истинной при $\exists! y\, \varphi_T[y/d]$ формуле $\exists y_1 \exists y_2\, (\varphi_T[y_1/d] \wedge \varphi_T[y_2/d] \wedge y_1 = y_2)$; перевод $(T = R)^*$ эквивалентен в $\mathcal{T}$ условию $\exists y\, (\varphi_T[y/d] \wedge \varphi_R[y/d])$, которое в силу единственности для φ_T и φ_R влечет $\forall y\, (\varphi_T[y/d] \leftrightarrow \varphi_R[y/d])$, а вместе с (2) — схему конгруэнтности для формул (и как ее частный случай при $\psi \equiv (a_0 = T_0[R/a])$ и замене $[T_0[T/a]/a_0]$ — схему конгруэнтности для термов); наконец, для **Ax2** из $(\forall x\, \psi[x/a])^* \approx \forall x\, (\psi^*)[x/a]$, кванторной аксиомы в Σ и $\exists y\, \varphi_T[y/d]$ следует $\exists y\, (\varphi_T[y/d] \wedge \psi^*[y/a])$, то есть $(\psi[T/a])^*$ по (2) (случай $\exists$ двойственен).

Обратная импликация в (c) очевидна из включения $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. □

В силу теоремы 2.20 и простой индукции по числу шагов любое итерированное дефинициальное расширение также консервативно над исходной теорией $\mathcal{T}$ (в частности, из непротиворечивости $\mathcal{T}$ следует непротиворечивость $\mathcal{T} \cup \{\alpha_S\}$, так что $\mathcal{T}'$ действительно является теорией в сигнатуре Σ').

Пример 2.21 (Дефинициальные расширения в теории множеств)**.** В сигнатуре $\Sigma = \{\in\}$ теории ZFC (пример 2.17 (4)) стандартная теоретико-множественная символика вводится цепочкой дефинициальных расширений:

(1) Предикат включения $a \subseteq b$ задается без дополнительных условий формулой $\chi_\subseteq \equiv \forall z\, (z \in a \to z \in b)$ с аксиомой $\forall x \forall y\, (x \subseteq y \leftrightarrow \forall z\, (z \in x \to z \in y))$.

(2) Константа пустого множества $\emptyset$ задается формулой $\chi_\emptyset \equiv \forall z \neg(z \in b)$: существование следует из аксиом выделения и бесконечности (или существования пустого множества), а единственность — из аксиомы экстенсиональности.

(3) Бинарный функциональный символ неупорядоченной пары $\{a_1, a_2\}$ задается формулой $\chi_{\{\cdot,\cdot\}} \equiv \forall z\,(z \in b \leftrightarrow (z = a_1 \vee z = a_2))$, существование и единственность которой обеспечивают аксиома пары и аксиома экстенсиональности.

(4) Одноместный функциональный символ множества всех подмножеств (булеана) $\mathcal{P}(a)$ задается уже в расширенном языке $\{\in, \subseteq\}$ формулой $\chi_{\mathcal{P}} \equiv \forall z\,(z \in b \leftrightarrow z \subseteq a)$ (на основании аксиомы степени и экстенсиональности).

(5) Константа или функция как явное переобозначение терма: одноэлементное множество $\{a\}$ вводится как сокращение терма $\{a, a\}$, а упорядоченная пара Куратовского $\langle a_1, a_2\rangle$ — как сокращение терма $\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$ по схеме замечания 2.19.

Замечание 2.22 (Шестнадцатеричная кодировка синтаксиса и путь к теоремам Геделя о неполноте)**.** Фиксация в § 1.1 единого 16-символьного объектного алфавита $\mathbb{A}$ для всех сигнатур первого порядка доставляет прямую арифметизацию синтаксиса без обращения к разложению на простые множители. Поскольку внешние списки гипотез и конечные выводы записываются через запятую внутри того же алфавита $\mathbb{A}$ (§ 2.3), при сопоставлении символам алфавита $\mathbb{A}$ шестнадцатеричных цифр $0, 1, \ldots, \mathrm{F}$ всякое слово ξ над $\mathbb{A}$ (включая термы, формулы, списки гипотез и выводы) взаимно однозначно кодируется натуральным числом $\ulcorner\xi\urcorner$, шестнадцатеричная запись которого получается приписыванием ведущей единицы к цепочке цифр слова ξ (ведущая единица исключает потерю начальных нулей). При такой кодировке базовые операции специального метаязыка части I статьи ИВ — конкатенация, проверка вхождения подслова и пословная замена $\xi[\zeta/\eta]$ — выражаются примитивно-рекурсивными (более того, элементарными по Кальмару) операциями над 16-ричными кодами; при разрешимой сигнатуре Σ синтаксические предикаты Term_Σ, Form_Σ, Ax переходят в примитивно-рекурсивные отношения на $\mathbb{N}$, а при разрешимой (соответственно рекурсивно перечислимой) аксиоматике A отношение «d есть код вывода формулы с кодом n из A» примитивно-рекурсивно (соответственно Σ_1), так что предикат доказуемости $\mathrm{Prov}_{\mathrm{A}}(n)$ выражается арифметической Σ_1-формулой.

Следствием этой арифметизации становятся обе теоремы Геделя о неполноте для любой непротиворечивой теории $\mathcal{T} = [\mathrm{A}]_\Sigma$ с рекурсивно перечислимой аксиоматикой A (при необходимости после консервативного дефинициального расширения по теореме 2.20):

- если теория $\mathcal{T}$ интерпретирует безындукционную арифметику Робинсона Q, то в ней представимы все вычислимые отношения и применима диагональная лемма, откуда $\mathcal{T}$ дедуктивно неполна (первая теорема Геделя о неполноте);
- если в теории $\mathcal{T}$ сверх того выводимы три условия доказуемости Гильберта–Бернайса–Леба для предиката $\mathrm{Prov}_{\mathrm{A}}$ (для чего достаточна интерпретируемость элементарной арифметики $\mathsf{EA} = I\Delta_0 + \exp$ и тем более $I\Sigma_1$), то предложение $\mathrm{Con}_{\mathrm{A}} \equiv \neg\mathrm{Prov}_{\mathrm{A}}(\ulcorner\bot\urcorner)$ (где $\bot \equiv \neg(\theta_0 \to \theta_0)$ для некоторого $\theta_0 \in \mathrm{Sent}_\Sigma$), выражающее непротиворечивость $\mathcal{T}$, не принадлежит $\mathcal{T}$ (вторая теорема Геделя о неполноте).

Вопрос о точной силе арифметических и строковых систем, достаточных для самого специального метаязыка части I статьи ИВ, рассмотрен в Заключении.

3. Семантика и модели

3.1. Структуры и истинность по Тарскому

В третьем разделе полностью переходим к теоретико-множественной семантике: метатеория свободно использует множества, функции и отношения, а выводимость $A \vdash \varphi$ из произвольного множества формул $A \subseteq \mathrm{Form}_\Sigma$ понимается в смысле § 2.4. Всюду ниже Σ обозначает сигнатуру (конечную или счетную).

Определение 3.1 (Σ-структура и оценка свободных переменных)**.** *Σ-структурой* (или *моделью сигнатуры* Σ) называется кортеж $\mathfrak{M} = \langle M, \{P^{\mathfrak{M}}\}_{P\in\mathrm{Pred}_\Sigma}, \{F^{\mathfrak{M}}\}_{F\in\mathrm{Func}_\Sigma}, \{C^{\mathfrak{M}}\}_{C\in\mathrm{Const}_\Sigma}\rangle$, где:

- $M \neq \varnothing$ — непустое множество, называемое *носителем* (или *универсумом*) структуры $\mathfrak{M}$;
- для каждого n-местного $P \in \mathrm{Pred}_\Sigma$ задано n-арное отношение $P^{\mathfrak{M}} \subseteq M^n$;
- для каждого n-местного $F \in \mathrm{Func}_\Sigma$ задана n-арная операция $F^{\mathfrak{M}}\colon M^n \to M$;
- для каждой константы $C \in \mathrm{Const}_\Sigma$ выделен элемент $C^{\mathfrak{M}} \in M$.

Оценкой свободных переменных в структуре $\mathfrak{M}$ называется произвольное отображение $s\colon \mathrm{FVar} \to M$. Для оценки s, свободной переменной a и элемента $m \in M$ через $s(a \mapsto m)$ обозначается оценка, совпадающая с s на всех свободных переменных, кроме a, и принимающая значение m в точке a.

Значение терма T в структуре $\mathfrak{M}$ при оценке s (обозначается $T^{\mathfrak{M}}[s] \in M$) определяется структурной рекурсией:

$$a^{\mathfrak{M}}[s] = s(a), \qquad C^{\mathfrak{M}}[s] = C^{\mathfrak{M}}, \qquad F(T_1,\dots,T_n)^{\mathfrak{M}}[s] = F^{\mathfrak{M}}(T_1^{\mathfrak{M}}[s],\dots,T_n^{\mathfrak{M}}[s]).$$

Определение 3.2 (Истинность формулы в структуре)**.** Отношение *истинности* (или *выполнимости*) $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$ формулы $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma$ в Σ-структуре $\mathfrak{M}$ при оценке $s\colon \mathrm{FVar} \to M$ определяется рекурсией по числу связок и кванторов в φ:

- $\mathfrak{M} \models P(T_1,\dots,T_n)[s] \iff (T_1^{\mathfrak{M}}[s],\dots,T_n^{\mathfrak{M}}[s]) \in P^{\mathfrak{M}}$;
- $\mathfrak{M} \models (T = R)[s] \iff T^{\mathfrak{M}}[s] = R^{\mathfrak{M}}[s]$;
- $\mathfrak{M} \models (\neg\varphi)[s] \iff$ неверно, что $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$;
- $\mathfrak{M} \models (\varphi \wedge \psi)[s] \iff \mathfrak{M} \models \varphi[s]$ и $\mathfrak{M} \models \psi[s]$;
- $\mathfrak{M} \models (\varphi \vee \psi)[s] \iff \mathfrak{M} \models \varphi[s]$ или $\mathfrak{M} \models \psi[s]$;
- $\mathfrak{M} \models (\varphi \to \psi)[s] \iff$ если $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$, то $\mathfrak{M} \models \psi[s]$;
- для кванторных формул $\forall x\,\psi$ и $\exists x\,\psi$ пусть b — кратчайшая (по числу символов a) свободная переменная, не входящая в ψ (тогда $\psi[b/x]$ есть формула меньшей сложности по предложению 1.8 и лемме 1.9):

$$\mathfrak{M} \models (\forall x\,\psi)[s] \iff \text{для всякого } m \in M \text{ выполнено } \mathfrak{M} \models \psi[b/x][s(b \mapsto m)],$$
$$\mathfrak{M} \models (\exists x\,\psi)[s] \iff \text{найдется } m \in M \text{ такой, что } \mathfrak{M} \models \psi[b/x][s(b \mapsto m)].$$

Формула φ *истинна в структуре* $\mathfrak{M}$ (пишут $\mathfrak{M} \models \varphi$), если $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$ для всякой оценки $s\colon \mathrm{FVar} \to M$; формула *общезначима* (пишут $\models \varphi$), если $\mathfrak{M} \models \varphi$ во всякой Σ-структуре $\mathfrak{M}$. Для множества формул $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Form}_\Sigma$ (или конечного списка Γ) запись $\mathfrak{M} \models \mathrm{A}[s]$ (соответственно $\mathfrak{M} \models \Gamma[s]$) означает, что $\mathfrak{M} \models \chi[s]$ для всех $\chi \in \mathrm{A}$ (соответственно $\chi \trianglelefteq \Gamma$), а $\mathfrak{M} \models \mathrm{A}$ — что $\mathfrak{M} \models \chi$ для всех $\chi \in \mathrm{A}$; в этом случае $\mathfrak{M}$ называется *моделью* множества A (в частности, моделью теории $\mathcal{T}$ при $\mathrm{A} = \mathcal{T}$). Формула φ *семантически следует* из A ($\mathrm{A} \models \varphi$), если для всякой Σ-структуры $\mathfrak{M}$ и всякой оценки $s\colon \mathrm{FVar} \to M$ из $\mathfrak{M} \models \mathrm{A}[s]$ следует $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$.

Лемма 3.3 (Лемма о совпадении и лемма о подстановке)**.** *Пусть $\mathfrak{M}$ — Σ-структура, $s, s_1, s_2\colon \mathrm{FVar} \to M$ — оценки.*

(a) (Лемма о совпадении.) *Если $s_1(a) = s_2(a)$ для всех свободных переменных a, входящих в T, то $T^{\mathfrak{M}}[s_1] = T^{\mathfrak{M}}[s_2]$. Если $s_1(a) = s_2(a)$ для всех свободных переменных a, входящих в φ, то $\mathfrak{M} \models \varphi[s_1] \iff \mathfrak{M} \models \varphi[s_2]$. В частности, для предложения $\varphi \in \mathrm{Sent}$ истинность $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$ от оценки s не зависит.*

(b) (Лемма о подстановке.) *Для любых термов $T_0, T \in \mathrm{Term}_\Sigma$, формулы $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma$ и свободной переменной a выполнены равенство $(T_0[T/a])^{\mathfrak{M}}[s] = T_0^{\mathfrak{M}}[s(a \mapsto T^{\mathfrak{M}}[s])]$ и эквивалентность*

$$\mathfrak{M} \models \varphi[T/a][s] \iff \mathfrak{M} \models \varphi[s(a \mapsto T^{\mathfrak{M}}[s])].$$

В частности, для всякой кванторной формулы $\forall x\, \psi$ (соответственно $\exists x\, \psi$) и любой свободной переменной c, не входящей в ψ, истинность $\mathfrak{M} \models (\forall x\, \psi)[s]$ равносильна выполнению $\mathfrak{M} \models \psi[c/x][s(c \mapsto m)]$ для всех $m \in M$ (соответственно для некоторого $m \in M$).

Доказательство. (a) Первое утверждение очевидно структурной индукцией по терму T. Второе доказывается индукцией по числу связок и кванторов в φ: атомарный случай следует из первого утверждения, пропозициональные связки сохраняют эквивалентность. Для $\varphi \equiv \mathsf{Q}x\, \psi$ и кратчайшей свободной переменной b, не входящей в ψ, всякая свободная переменная, входящая в $\psi[b/x]$, либо совпадает с b, либо входит в $\mathsf{Q}x\, \psi$; поэтому из совпадения s_1 и s_2 на свободных переменных, входящих в $\mathsf{Q}x\, \psi$, следует совпадение $s_1(b \mapsto m)$ и $s_2(b \mapsto m)$ на свободных переменных, входящих в $\psi[b/x]$, для каждого $m \in M$, и применяется предположение индукции к $\psi[b/x]$.

(b) Равенство для термов T_0 доказывается структурной индукцией по T_0. Эквивалентность для формул доказывается индукцией по числу связок и кванторов в φ: атомарный случай и булевы связки следуют из утверждения для термов и предположения индукции. Пусть $\varphi \equiv \forall x\, \psi$. Заметим предварительно, что для любой свободной переменной c, не входящей в ψ, и кратчайшей свободной переменной b, не входящей в ψ, выполнено $\psi[c/x] \equiv (\psi[b/x])[c/b]$; применяя предположение индукции к формуле $\psi[b/x]$ меньшей сложности, получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models \psi[c/x][s(c \mapsto m)] &\iff \mathfrak{M} \models \psi[b/x][(s(c \mapsto m))(b \mapsto m)] \\ &\iff \mathfrak{M} \models \psi[b/x][s(b \mapsto m)] \end{aligned}$$

(последняя эквивалентность следует из пункта (a), так как при $c \not\equiv b$ переменная c не входит в $\psi[b/x]$). Тем самым условие истинности $\forall x\, \psi$ не зависит от выбора свободной переменной c, не входящей в ψ.

Выберем теперь свободную переменную c, не входящую в ψ и T и отличную от a. Тогда c не входит в $\psi[T/a]$, и пословная замена дает $(\psi[T/a])[c/x] \equiv (\psi[c/x])[T/a]$. При любом $m \in M$ по пункту (a) имеем $T^{\mathfrak{M}}[s(c \mapsto m)] = T^{\mathfrak{M}}[s]$ (так как c не входит в T), а поскольку $c \not\equiv a$, выполнено $(s(c \mapsto m))(a \mapsto T^{\mathfrak{M}}[s]) = (s(a \mapsto T^{\mathfrak{M}}[s]))(c \mapsto m)$. Применение предположения индукции к формуле $\psi[c/x]$ меньшей сложности и оценке $s(c \mapsto m)$ для каждого $m \in M$ дает требуемую эквивалентность:

$$\mathfrak{M} \vDash (\forall x\, \psi[T/a])[s] \iff \mathfrak{M} \vDash (\forall x\, \psi)[s(a \mapsto T^{\mathfrak{M}}[s])].$$

Случай $\exists x\, \psi$ аналогичен. □

3.2. Корректность и полнота

Два основных метатеоретических результата связывают синтаксическую выводимость $\vdash$ с семантическим следованием $\vDash$.

Предложение 3.4 (Корректность ИП)**.** *Пусть* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Form}_\Sigma$ *и* $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma$. *Если* $\mathrm{A} \vdash \varphi$, *то* $\mathrm{A} \vDash \varphi$.

Доказательство. По определению $\mathrm{A} \vdash \varphi$ найдется конечный список Γ формул из A, для которого $\Gamma \vdash \varphi$ в смысле определения 2.6. Зафиксируем произвольную Σ-структуру $\mathfrak{M}$ с носителем M. Индукцией по выводу $\Gamma \vdash \varphi$ покажем, что для всякой оценки $s\colon \mathrm{FVar} \to M$, при которой $\mathfrak{M} \vDash \Gamma[s]$, выполнено $\mathfrak{M} \vDash \varphi[s]$.

- *База аксиом* (**D1**): пропозициональные аксиомы истинны при любой оценке s ввиду определения истинности связок $\neg, \wedge, \vee, \to$ через классические булевы операции на $\{0,1\}$. Аксиомы равенства истинны: рефлексивность $T = T$ очевидна, а для схем конгруэнтности $(T = R) \to (T_0[T/a] = T_0[R/a])$ и $(T = R) \to (\psi[T/a] \to \psi[R/a])$ равенство $T^{\mathfrak{M}}[s] = R^{\mathfrak{M}}[s]$ влечет совпадение оценок $s(a \mapsto T^{\mathfrak{M}}[s]) = s(a \mapsto R^{\mathfrak{M}}[s])$, откуда по лемме 3.3 (b) следуют $(T_0[T/a])^{\mathfrak{M}}[s] = (T_0[R/a])^{\mathfrak{M}}[s]$ и равносильность $\mathfrak{M} \vDash \psi[T/a][s] \iff \mathfrak{M} \vDash \psi[R/a][s]$. Для кванторной аксиомы $\forall x\, \psi[x/a] \to \psi[T/a]$ (где x не входит в ψ): переменная a не входит в $\psi[x/a]$ и $(\psi[x/a])[a/x] \equiv \psi$, поэтому по лемме 3.3 (b) условие $\mathfrak{M} \vDash (\forall x\, \psi[x/a])[s]$ означает $\mathfrak{M} \vDash \psi[s(a \mapsto m)]$ для всех $m \in M$, в частности при $m = T^{\mathfrak{M}}[s]$, что по той же лемме равносильно $\mathfrak{M} \vDash \psi[T/a][s]$. Двойственно проверяется $\psi[T/a] \to \exists x\, \psi[x/a]$.

- *База гипотез* (**D2**): если $\varphi \trianglelefteq \Gamma$, то $\mathfrak{M} \vDash \varphi[s]$ по условию $\mathfrak{M} \vDash \Gamma[s]$.

- *Modus Ponens* (**D3**): из $\mathfrak{M} \vDash \chi[s]$ и $\mathfrak{M} \vDash (\chi \to \varphi)[s]$ по определению 3.2 сразу следует $\mathfrak{M} \vDash \varphi[s]$.

- *Правила Бернайса* (**D4**): пусть $\Gamma \vdash \psi \to \chi$, a не входит ни в Γ, ни в ψ и x не входит в χ. Для произвольного $m \in M$ оценка $s(a \mapsto m)$ совпадает с s на всех свободных переменных, входящих в Γ и в ψ. По лемме 3.3 (a) имеем $\mathfrak{M} \vDash \Gamma[s(a \mapsto m)]$, откуда по предположению индукции $\mathfrak{M} \vDash (\psi \to \chi)[s(a \mapsto m)]$. Если $\mathfrak{M} \vDash \psi[s]$, то снова по лемме 3.3 (a) выполнено $\mathfrak{M} \vDash \psi[s(a \mapsto m)]$, а значит $\mathfrak{M} \vDash \chi[s(a \mapsto m)]$ для всех $m \in M$. Поскольку a не входит в $\chi[x/a]$ и $(\chi[x/a])[a/x] \equiv \chi$, по лемме 3.3 (b) это дает $\mathfrak{M} \vDash (\forall x\, \chi[x/a])[s]$. Случай $\exists x\, \psi[x/a] \to \chi$ проверяется аналогично.

Так как для любых $\mathfrak{M}$ и s условие $\mathfrak{M} \vDash \mathrm{A}[s]$ влечет $\mathfrak{M} \vDash \Gamma[s]$, получаем $\mathrm{A} \vDash \varphi$. □

Теорема 3.5 (Теорема Геделя о полноте)**.** *Пусть* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Form}_\Sigma$ *и* $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma$. *Если* $\mathrm{A} \models \varphi$, *то* $\mathrm{A} \vdash \varphi$.

Замечание 3.6 (Связь с подробным доказательством полноты и основные следствия)**.** Подробное доказательство теоремы о полноте (методом Хенкина) изложено в отдельной заметке «Конструкция Хенкина».

В сочетании с корректностью (предложение 3.4) теорема о полноте дает два фундаментальных следствия о моделях первого порядка:

(1) *Теорема компактности:* множество формул $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Form}_\Sigma$ имеет модель (то есть $\mathfrak{M} \models \mathrm{A}[s]$ для некоторых $\mathfrak{M}$ и s) тогда и только тогда, когда модель имеет каждое конечное подмножество $\mathrm{A}_0 \subseteq \mathrm{A}$. Действительно, выберем произвольную формулу $\chi_0 \in \mathrm{Form}_\Sigma$ (например, $a = a$ в ИП с равенством или $P(a, \ldots, a)$ в ИП без равенства) и положим $\bot \equiv \neg(\chi_0 \to \chi_0)$. Если A не имеет модели, то $\mathrm{A} \models \bot$, откуда по теореме 3.5 $\mathrm{A} \vdash \bot$, то есть $\Gamma \vdash \bot$ для некоторого конечного списка Γ формул из A; по предложению 3.4 конечное множество $\mathrm{A}_0 \subseteq \mathrm{A}$ входящих в Γ формул удовлетворяет $\mathrm{A}_0 \models \bot$, и потому A_0 не имеет модели.

(2) *Нисходящая теорема Левенгейма–Сколема:* если множество формул $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{Form}_\Sigma$ имеет модель, то оно имеет не более чем счетную модель (поскольку сигнатура Σ, а следовательно и множество формул Form_Σ, не более чем счетны, модель строится на классах эквивалентности термов в конструкции Хенкина; для несчетных сигнатур, не рассматриваемых в настоящей заметке, верхняя граница мощности модели заменяется на $|\Sigma| + \aleph_0$).

3.3. Исчисление высказываний как фрагмент исчисления предикатов

Исчисление высказываний (ИВ) допускает два представления средствами логики первого порядка. В первом связки ИВ остаются логическими связками, пропозициональные переменные становятся константами предметной области (элементарными высказываниями), а переход от предметной области к истинностным значениям осуществляется единственным одноместным предикатом; ИВ оказывается бескванторным фрагментом ИП. Во втором формулы ИВ становятся термами, связки — функциональными символами, а выводимость и эквивалентность формул — отношениями между элементами предметной области; так формализуется алгебраическая семантика ИВ (части III статьи ИВ).

Всюду в этом подразделе $\vdash_{\text{ИВ}}$ обозначает выводимость в ИВ (§ II.3 статьи ИВ), а $p_1, p_2, \ldots$ — попарно различные пропозициональные переменные (соответствующие классу PVar). Поскольку всякий конечный список формул ИВ содержит лишь конечное число переменных, сигнатуры, вводимые ниже, при рассмотрении конкретных Γ и $\mathcal{A}$ можно считать конечными.

Инкапсуляция: ИВ как бескванторное ИП. Пусть сигнатура Σ_0 состоит из бесконечной серии констант $C_1, C_2, \cdots \in \mathrm{Const}_{\Sigma_0}$, представляющих элементарные высказывания в предметной области, и единственного одноместного предикатного символа $P \in \mathrm{Pred}_{\Sigma_0}$ ($\mathrm{Func}_{\Sigma_0} = \emptyset$), выступающего как формальный предикат истинности («высказывание истинно»). Всякой формуле $\mathcal{A}$ языка ИВ сопоставляется формула $\mathcal{A}^*$

языка ИП сигнатуры Σ_0 заменой каждой переменной p_i атомарной формулой $P(C_i)$:

$$p_i^* \equiv P(C_i), \qquad (\neg\mathcal{A})^* \equiv \neg\mathcal{A}^*, \qquad (\mathcal{A}\circ\mathcal{B})^* \equiv (\mathcal{A}^*\circ\mathcal{B}^*), \quad \circ\in\{\wedge,\vee,\to\}.$$

По определению 1.5 формулы вида $\mathcal{A}^*$ суть в точности замкнутые бескванторные формулы ИП без равенства сигнатуры Σ_0, а отображение $\mathcal{A}\mapsto\mathcal{A}^*$ взаимно однозначно. Для списка $\Gamma=\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_k$ в ИВ полагается $\Gamma^*=\mathcal{C}_1^*,\ldots,\mathcal{C}_k^*$.

Индивидные переменные в формулы $\mathcal{A}^*$ не входят, поэтому значение $\mathcal{A}^*$ в Σ_0-структуре $\mathfrak{M}=\langle M, P^{\mathfrak{M}}, \{C_i^{\mathfrak{M}}\}_{i\geq 1}\rangle$ от оценки s не зависит (лемма 3.3 (а)) и определяется одними условиями $C_i^{\mathfrak{M}}\in P^{\mathfrak{M}}$ (определение 3.1). Иначе говоря, Σ_0-структура $\mathfrak{M}$ задает двузначную оценку $\varepsilon_{\mathfrak{M}}$ в смысле статьи ИВ правилом

$$\varepsilon_{\mathfrak{M}}(p_i)=\begin{cases}1, & \text{если } C_i^{\mathfrak{M}}\in P^{\mathfrak{M}},\\ 0, & \text{если } C_i^{\mathfrak{M}}\notin P^{\mathfrak{M}},\end{cases}$$

и всякая двузначная оценка ε получается так из структуры $\mathfrak{M}$ с носителем $M=\{0,1\}$, предикатом $P^{\mathfrak{M}}=\{1\}$ и константами $C_i^{\mathfrak{M}}=\varepsilon(p_i)$; при этом структурной индукцией по $\mathcal{A}$ проверяется

$$\mathfrak{M}\vDash\mathcal{A}^* \iff \varepsilon_{\mathfrak{M}}(\mathcal{A})=1.$$

Предложение 3.7 (Инкапсуляция ИВ в ИП)**.** *Для любого списка Γ формул ИВ и формулы $\mathcal{A}$ языка ИВ*

$$\Gamma\vdash_{\text{ИВ}}\mathcal{A} \iff \Gamma^*\vdash\mathcal{A}^*,$$

где справа подразумевается выводимость в ИП сигнатуры Σ_0 (с равенством или без него).

Доказательство. Пусть $\Gamma\vdash_{\text{ИВ}}\mathcal{A}$. Замена каждой формулы $\mathcal{B}$ вывода в ИВ формулой $\mathcal{B}^*$ переводит аксиомы ИВ в аксиомы группы 1 определения 2.1, гипотезы из Γ — в гипотезы из Γ^*, а применения правила Modus Ponens — в применения правила **D3**; получается вывод $\Gamma^*\vdash\mathcal{A}^*$.

Обратно, пусть $\Gamma^*\vdash\mathcal{A}^*$. По предложению 3.4 выполнено $\Gamma^*\vDash\mathcal{A}^*$. Пусть ε — двузначная оценка, при которой $\varepsilon(\mathcal{C})=1$ для всех $\mathcal{C}\trianglelefteq\Gamma$, и $\mathfrak{M}$ — Σ_0-структура с $M=\{0,1\}$, $P^{\mathfrak{M}}=\{1\}$ и $C_i^{\mathfrak{M}}=\varepsilon(p_i)$. Тогда $\mathfrak{M}\vDash\Gamma^*$, откуда $\mathfrak{M}\vDash\mathcal{A}^*$, то есть $\varepsilon(\mathcal{A})=1$. Следовательно, $\Gamma\vDash_{\mathbb{B}}\mathcal{A}$, и по теореме Поста (§ III.4 статьи ИВ) $\Gamma\vdash_{\text{ИВ}}\mathcal{A}$. □

Таким образом, ИВ совпадает с фрагментом замкнутых бескванторных формул ИП без равенства сигнатуры Σ_0, а выводимость в ИП на этом фрагменте консервативна: вывод формулы $\mathcal{A}^*$ в ИП, сколь угодно использующий кванторы и равенство, не доказывает ничего сверх выводимого в ИВ. При этом добавление кванторов в языке сигнатуры Σ_0 уже в отсутствие равенства дает формулы о носителе вроде $\exists x\,P(x)$ или $\forall x\,P(x)$, не сводящиеся к формулам ИВ, а в ИП с равенством появляются также утверждения о мощности носителя и различении элементарных высказываний в предметной области, например $\exists x\,\exists y\,\neg(x=y)$ или $\neg(C_1=C_2)$.

Погружение в предметную область: теория булевых алгебр. Пусть сигнатура Σ_{BA} состоит из функциональных символов $\sim$ (арности 1), $\sqcap$, $\sqcup$, $\Rightarrow$ (арности 2) и констант $\mathbf{0},\mathbf{1}$; нелогических предикатных символов в ней нет ($\mathrm{Pred}_{\Sigma_{\mathsf{BA}}}=\emptyset$), и единственным отношением языка служит логическое равенство $=$. Знаки операций отличны от

связок $\neg, \wedge, \vee, \to$, поскольку функциональные символы сигнатуры не совпадают с логическими символами алфавита (определение 1.3). Для термов используется инфиксная метаязыковая запись $T \sqcap R$, $T \sqcup R$, $T \Rightarrow R$, $\sim T$, а запись $T \leqslant R$ есть сокращение атомарной формулы $(T \sqcap R) = T$. Порядок можно ввести и как двуместный предикатный символ сигнатуры с аксиомой $a \leqslant b \leftrightarrow (a \sqcap b) = a$; получающаяся теория отличается лишь обозначениями.

Через BA обозначается теория булевых алгебр: конечный список равенств сигнатуры Σ_{BA}, выражающих законы дистрибутивной решетки с наименьшим элементом $\mathbf{0}$, наибольшим элементом $\mathbf{1}$ и дополнением $\sim$, а также равенство $(a \Rightarrow b) = (\sim a \sqcup b)$. Аксиомы равенства в этот список не входят: они логические (группа 3 определения 2.1). Модели теории BA суть в точности булевы алгебры в смысле § III.3 статьи ИВ (включая одноэлементную).

Переменной p_i сопоставляется свободная переменная a_i, а всякой формуле $\mathcal{A}$ языка ИВ — терм $T_{\mathcal{A}}$ сигнатуры Σ_{BA}:

$$T_{p_i} \equiv a_i, \qquad T_{\neg\mathcal{A}} \equiv \sim T_{\mathcal{A}},$$
$$T_{\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}} \equiv T_{\mathcal{A}} \sqcap T_{\mathcal{B}}, \qquad T_{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}} \equiv T_{\mathcal{A}} \sqcup T_{\mathcal{B}}, \qquad T_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} \equiv T_{\mathcal{A}} \Rightarrow T_{\mathcal{B}}.$$

Если $\mathfrak{B}$ — булева алгебра, рассматриваемая как Σ_{BA}-структура, то оценка $s\colon \mathrm{FVar} \to \mathfrak{B}$ свободных переменных ИП задает оценку $\varepsilon_s(p_i) = s(a_i)$ переменных ИВ со значениями в $\mathfrak{B}$, всякая оценка ИВ получается так, и структурной индукцией по $\mathcal{A}$ проверяется

$$T_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{B}}[s] = \varepsilon_s(\mathcal{A}).$$

В этом представлении формулы ИВ становятся элементами предметной области, а утверждения о них — атомарными формулами равенства.

Предложение 3.8 (Алгебраическое представление ИВ)**.** *Для любого списка* $\Gamma = \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ *формул ИВ и формулы* $\mathcal{A}$ *языка ИВ*

$$\Gamma \vdash_{\text{ИВ}} \mathcal{A} \iff \mathsf{BA} \vdash (T_{\mathcal{C}_1} \sqcap \cdots \sqcap T_{\mathcal{C}_k}) \leqslant T_{\mathcal{A}},$$

а при пустом Γ*:* $\vdash_{\text{ИВ}} \mathcal{A} \iff \mathsf{BA} \vdash T_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}$*. В частности,* $\vdash_{\text{ИВ}} \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathsf{BA} \vdash T_{\mathcal{A}} = T_{\mathcal{B}}$.

Доказательство. По теореме о дедукции (§ II.3 статьи ИВ) условие $\Gamma \vdash_{\text{ИВ}} \mathcal{A}$ равносильно $\vdash_{\text{ИВ}} (\mathcal{C}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{C}_k) \to \mathcal{A}$, а по теореме о полноте относительно класса булевых алгебр (§ III.4 статьи ИВ) — равенству $\varepsilon(\mathcal{C}_1) \wedge \cdots \wedge \varepsilon(\mathcal{C}_k) \to \varepsilon(\mathcal{A}) = 1$ для всякой булевой алгебры и всякой оценки ε в ней. По лемме об импликации в булевой алгебре (§ III.3 статьи ИВ) и равенству $T_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{B}}[s] = \varepsilon_s(\mathcal{B})$ это означает, что формула $(T_{\mathcal{C}_1} \sqcap \cdots \sqcap T_{\mathcal{C}_k}) \leqslant T_{\mathcal{A}}$ истинна во всякой модели теории BA при всякой оценке, то есть $\mathsf{BA} \vDash (T_{\mathcal{C}_1} \sqcap \cdots \sqcap T_{\mathcal{C}_k}) \leqslant T_{\mathcal{A}}$. По теореме 3.5 и предложению 3.4 последнее равносильно выводимости этой формулы из BA. Случай пустого Γ и утверждение об эквивалентности рассматриваются так же. □

Теория BA формулирует средствами ИП то, что в части III статьи ИВ формулировалось в теоретико-множественной метатеории: эквивалентность формул выражается равенством, выводимость — порядком, а алгебра Линденбаума–Тарского LT есть свободная модель теории BA со счетным множеством образующих $[p_1], [p_2], \ldots$. Добавление кванторов и связок ИП над равенствами позволяет выражать свойства отдельных моделей, невыразимые формулами ИВ: аксиома $\neg(\mathbf{0} = \mathbf{1})$ отсекает одноэлементную алгебру, а аксиомы $\neg(\mathbf{0} = \mathbf{1})$ и $\forall x\, (x = \mathbf{0} \vee x = \mathbf{1})$ вместе выделяют с точностью до изоморфизма двузначную модель $\mathbb{B}$.

Словарь соответствия. В таблице сопоставлены понятия ИВ и их образы при двух представлениях. Средний столбец отличается от первого лишь оформлением элементарных высказываний в виде атомов $P(C_i)$, что и выражает предложение 3.7; правый столбец есть запись алгебраической семантики ИВ на языке ИП.

ИВ	**ИП сигнатуры Σ_0 (инкапсуляция)**	**Теория BA (погружение)**
переменная p_i	константа C_i и атом $P(C_i)$	свободная переменная a_i
связки $\neg, \wedge, \vee, \to$	логические связки $\neg, \wedge, \vee, \to$	функциональные символы $\sim, \sqcap, \sqcup, \Rightarrow$
формула $\mathcal{A}$	замкнутая бескванторная формула $\mathcal{A}^*$	терм $T_{\mathcal{A}}$
модель: булева алгебра B (двузначная $\mathbb{B}$)	Σ_0-структура $\mathfrak{M}$ (эталон: $\{0,1\}$ с $P^{\mathfrak{M}} = \{1\}$)	модель $\mathfrak{B} \models \mathsf{BA}$
оценка ε переменных p_i	условие $C_i^{\mathfrak{M}} \in P^{\mathfrak{M}}$	оценка s переменных a_i
значение $\varepsilon(\mathcal{A})$	истинностное значение $\mathcal{A}^*$ в $\mathfrak{M}$	значение терма $T_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{B}}[s]$
истинность: $\varepsilon(\mathcal{A}) = 1$	$\mathfrak{M} \models \mathcal{A}^*$	$\mathfrak{B} \models (T_{\mathcal{A}} = \mathbf{1})[s]$
теорема: $\vdash_{\text{ИВ}} \mathcal{A}$	$\vdash \mathcal{A}^*$	$\mathsf{BA} \vdash T_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}$
эквивалентность: $\vdash_{\text{ИВ}} \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$	$\vdash \mathcal{A}^* \leftrightarrow \mathcal{B}^*$	$\mathsf{BA} \vdash T_{\mathcal{A}} = T_{\mathcal{B}}$
$\mathcal{A} \vdash_{\text{ИВ}} \mathcal{B}$	$\mathcal{A}^* \vdash \mathcal{B}^*$	$\mathsf{BA} \vdash T_{\mathcal{A}} \leqslant T_{\mathcal{B}}$
$\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k \vdash_{\text{ИВ}} \mathcal{B}$	$\mathcal{C}_1^*, \ldots, \mathcal{C}_k^* \vdash \mathcal{B}^*$	$\mathsf{BA} \vdash (T_{\mathcal{C}_1} \sqcap \cdots \sqcap T_{\mathcal{C}_k}) \leqslant T_{\mathcal{B}}$

Заключение. Постулат бинарности и спираль метатеорий

В части I статьи ИВ из естественного языка был выделен специальный метаязык конечных слов, включающий операции над словами (§ I.1), порождение классов слов (§ I.2), а также общие утверждения и индукцию по построению (§ I.3). Для содержательного исследования любого формального исчисления — доказательства однозначности разбора, замкнутости подстановки, теоремы о дедукции и финитарной непротиворечивости — принцип индукции остается безусловно необходимым. Развертываемый ниже анализ не отказывается от индукции как рабочей метатеории, а вскрывает внутреннюю стратификацию самой части I статьи ИВ: внутри нее последовательно выделяются операциональное ядро порождения и проверки конкретных цепочек (§§ I.1–I.2, ступень 0), общие высказывания без индукции (начало § I.3, ступень 1) и полный финитарный метаязык со структурной индукцией (§§ I.1–I.3 в полном объеме, ступень 2), за которым следует теоретико-множественная семантика (часть III статьи ИВ и раздел 3 настоящей статьи, ступень 3).

Постулат бинарности. Доформальной основой специального метаязыка части I статьи ИВ служит *постулат бинарности* в двух неразделимых проявлениях:

(1) *Знаковая бинарность:* способность различать хотя бы два несовпадающих символа ($\partial \neq \varrho$, $\mathtt{0} \neq \mathtt{1}$). Над однобуквенным алфавитом $\{|\}$ конкатенация коммутатив-

на ($|^m|^n \equiv |^n|^m$) и сводится к сложению длин, порождающему разрешимую арифметику Пресбургера. Появление второго различимого знака качественно меняет структуру: возникает некоммутативность приписывания ($\partial\varrho \not\equiv \varrho\partial$) и позиционное кодирование, тогда как дальнейшее расширение конечного алфавита с 2 до 16 символов $\mathbb{A}$ сводится к блочному кодированию четверками битов ($16 = 2^4$) и новой выразительной мощности не добавляет.

(2) *Логическая бинарность:* двузначность исхода элементарного сличения слов («тождественны / различны» в § I.1, «верно / неверно» в § I.3 статьи ИВ) и жестко фиксированный смысл союзов метаязыка («не», «и», «или», «если …, то»).

Эволюция рекурсивных правил и условия замыкания. Рекурсивные определения классов слов вида «база — правила — замыкание» (§ I.2 статьи ИВ) не требуют заранее сильной метатеории именно потому, что заключительный пункт «других слов в классе нет» меняет свой логический статус вместе с ростом метатеории:

- на доформальной *ступени 0* (§§ I.1–I.2 статьи ИВ) правила служат лишь шаблонами пошаговой проверки конечной цепочки предъявленных слов, а замыкание выступает ограничительной нормой признания (слово относится к классу только по предъявлении его конечного построения); как отмечено уже в § I.2 статьи ИВ, такая проверка опирается только на осмотр слов из § I.1 и не привлекает ни логику общих утверждений, ни индукцию из § I.3;

- при добавлении кванторов на *ступени 1* (начало § I.3 статьи ИВ) замыкание превращается в явное Σ_1-определение принадлежности через существование кода построения: $\xi \in K \iff \exists d\, \mathrm{Build}_K(d, \xi)$;

- при включении индукции по построению на *ступени 2* (§§ I.1–I.3 статьи ИВ целиком) замыкание раскрывается как схема структурной (или уровневой) индукции, позволяющая доказывать общие утверждения $\forall \xi \in K\, S(\xi)$;

- при включении аксиомы бесконечности на *ступени 3* замыкание приобретает классический теоретико-множественный вид наименьшей неподвижной точки $K = \bigcap\{X \mid \mathrm{Base} \subseteq X \wedge \mathrm{Step}(X) \subseteq X\}$.

Спираль метатеорий и ретроспективная верификация. Записать аксиоматику более сильной теории как конечный текст можно уже на ступени 0, еще не располагая ее дедуктивной мощью. Качественное приращение возникает на следующем шаге, когда построенная система принимается в качестве новой действующей метатеории и обращается вниз для верификации и доказательства непротиворечивости предыдущей ступени:

Ступень 0. *Порождение (бесквантворное операциональное ядро, §§ I.1–I.2 статьи ИВ).* Средствами конкатенации, пословной замены и проверки предъявленных цепочек задаются синтаксис и правила вывода ИВ и ИП (термы, формулы, аксиомы, выводы) и записываются аксиомы формальных теорий (TC, PA, HF, ZFC), еще без привлечения общих утверждений и индукции из § I.3 и без доказательства общих метатеорем.

Ступень 1. *Квантификация без индукции (*$\mathsf{TC} \equiv \mathsf{Q}$*).* Присоединение к операциям § I.1 общих и экзистенциальных высказываний из первой половины § I.3 статьи ИВ («для всяких слов», «найдется слово») до введения принципа индукции — формально это принятие кванторов ИП над аксиомами конкатенации (ассоциативность, свойство редактора $\xi\eta \equiv \zeta\theta \implies \xi \equiv \zeta \vee \exists\omega\,(\xi\omega \equiv \zeta \vee \zeta\omega \equiv \xi)$ и неразложимость символов конечного алфавита) — дает *теорию конкатенаций* TC А. Гжегорчика (Grzegorczyk, 2005), взаимно интерпретируемую (посредством кодирования последовательностей по У. Куайну, 1946, либо 16-ричных кодов замечания 2.22) с безындукционной *арифметикой Робинсона* Q. Обращаясь к ступени 0, уровень TC/Q обеспечивает Σ_1-представимость классов Term_Σ, Form_Σ, Ax, Thm, диагональную лемму, неразрешимость ИП и первую теорему Геделя о неполноте. Однако в отсутствие индукции здесь недоказуемы ни тотальность и однозначность пословной замены $\xi[\zeta/\eta]$, ни однозначность разбора (предложение 1.8), ни теорема о дедукции, ни финитарная непротиворечивость $[\emptyset]_\Sigma$.

Ступень 2. *Индукция над конечным (*$\mathsf{TC} + \mathrm{Ind} \equiv \mathsf{PA} \equiv \mathsf{HF}$*; финитарный минимум* $I\Sigma_1 \equiv_{\Pi_2} \mathsf{PRA}$ *и* EA*).* Включение индукции по построению (§ I.3) замыкает полный специальный метаязык части I статьи ИВ (§§ I.1–I.3), а при распространении схемы индукции на все формулы первого порядка порождает полную теорию конечных объектов в трех попарно биинтерпретируемых формах (Ackermann, 1937; Grzegorczyk, 2005): теории конкатенаций со схемой индукции $\mathsf{TC} + \mathrm{Ind}$, арифметики Пеано PA и теории наследственно конечных множеств HF (ZF с отрицанием аксиомы бесконечности и $\in$-индукцией).

Доказательства разделов 1–2 используют нижний, финитарный фрагмент этой ступени, обладающий тремя точными чертами: (а) из-за правил **F4** и **D4** индукция выходит за пределы собственных подслов к числовой мере — кванторно-связочной глубине формул ($\psi[c/b]$ в лемме 1.9, $\chi[b/x]$ в оценке v из § 2.4 и в переводе $(\mathsf{Q}x\,\psi)^*$ теоремы 2.20) и длине вывода (в предложении 2.12 (а) после леммы 2.7); (б) индуктивные гипотезы содержат свободные параметры (T, a, Δ, χ) с перестановкой и сменой параметра внутри шага (в лемме 1.7 (b) и при двойной подстановке $[c/b]$, $[T/a]$ в лемме 1.9); (в) при буквальном задании классов неограниченным Σ_1-квантором существования построения эта база совпадает с арифметикой $I\Sigma_1$, которая по теореме Парсонса–Минца–Такеути (Hájek, Pudlák, 1993) Π_2-консервативна над *примитивно-рекурсивной арифметикой* PRA (границей гильбертовского финитизма по Тейту; Tait, 1981), а при выписывании явных экспоненциальных оценок кодов сужается до *элементарной арифметики* $\mathsf{EA} = I\Delta_0 + \exp$ (чистой $I\Delta_0$ без exp недостаточно ввиду таблиц истинности 2^n в ИВ и сквозных подстановок).

Обращаясь вниз, ступень 2 полностью верифицирует синтаксис ступени 0 (разбор, подстановку, дедукцию, устранимость дефинициальных расширений, финитарную непротиворечивость $[\emptyset]_\Sigma$) и доказывает непротиворечивость безындукционных теорий ступени 1 ($\mathrm{Con}(\mathsf{TC})$, $\mathrm{Con}(\mathsf{Q})$ выводимы уже в $\mathsf{PRA}/I\Sigma_1$), однако по второй теореме Геделя не дока-

зывает собственную непротиворечивость $\mathrm{Con}(\mathsf{PA})$.

Ступень 3. *Актуальная бесконечность (*ZFC*; пороги счетной семантики* WKL_0 *и* ACA_0*).* Поскольку теория конечных множеств HF уже построена на ступени 2, переход к теоретико-множественной метатеории ZFC сводится к принятию аксиомы бесконечности Inf (вместе с аксиомами степени и выбора над бесконечными множествами). В терминах обратной математики (Simpson, 2009) внутри раздела 3 различаются два порога арифметики второго порядка: построение модели Хенкина и теоремы полноты и компактности для счетных сигнатур эквивалентны над RCA_0 подсистеме WKL_0 (слабая лемма Кенига поверх Σ_1-индукции, Π^0_2-консервативная над PRA по теореме Х. Фридмана), тогда как задание полного предиката истинности Тарского $\mathfrak{M} \vDash \varphi[s]$ над произвольной бесконечной структурой и общая индукция корректности отвечают системе ACA_0 (первопорядковая часть которой совпадает с PA).

На уровне ZFC совокупность конечных объектов ступени 2 собирается в одно актуально бесконечное множество ($V_\omega \vDash \mathsf{HF}$, $\omega \vDash \mathsf{PA}$), что доставляет доказательство $\mathrm{Con}(\mathsf{PA})/\mathrm{Con}(\mathsf{HF})$, общую теорию моделей первого порядка и сравнение произвольных теорий, тогда как вопрос о $\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC})$ переходит на следующий виток (к аксиомам больших кардиналов или иерархии универсумов `Type` ядра Lean из § 1.3). При этом сама ZFC записана как рекурсивная схема аксиом в 16-символьном синтаксисе ступени 0, замыкая виток спирали (рис. 6).

Тем самым постулат бинарности выступает не как единственная аксиома, из которой дедуктивно выводима вся математика — теоремы Геделя исключают существование такой замкнутой базы, и каждый переход к следующей ступени спирали (квантификация над потенциально неограниченной областью слов, замыкание конечной итерации в принцип индукции, опредмечивание бесконечного процесса в актуально бесконечное множество) представляет собой самостоятельный, логически невыводимый из предыдущего акт идеализации, — но как минимальный априорный порог дискурсивного мышления. В этом и состоит точное разделение двух уровней базы: постулат бинарности вместе с операциональным ядром §§ I.1–I.2 статьи ИВ доставляет минимальную *знаковую опору*, достаточную для записи и запуска формальных правил, тогда как полный специальный метаязык §§ I.1–I.3 со структурной индукцией образует минимальную *дедуктивную метатеорию*, необходимую для доказательства корректности этих правил. Даже при построении многозначных, интуиционистских или модальных исчислений сам метаязык их синтаксиса и проверки правил остается строго двузначным. Ниже порога различения в знаке и в суждении невозможны ни формальный язык, ни доказательство, ни счет; выше него — уже без расширения исходного двухбитового словаря — развертывается вся незавершаемая спираль математических теорий и метатеорий.



Рис. 6: Спираль метатеоретического восхождения: слева — возврат формальных аксиоматик в синтаксис ступени 0; в центре — пошаговое усиление метатеории от постулата бинарности; справа — ретроспективная верификация и доказательство непротиворечивости предыдущей ступени.

Литература

[1] Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т. 1: Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1979.

[2] Казимиров Н. И. Финитарная база формальных систем и строгое построение исчисления высказываний с его моделями. https://mathem.at/Materials/propositional_calculus.html

[3] Казимиров Н. И. Конструкция Хенкина. https://mathem.at/Materials/henkin_construction.html

[4] Кейслер Г., Чанг К. Теория моделей. М.: Мир, 1977.

[5] Клини С. К. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.

[6] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971.

[7] Шенфилд Дж. Математическая логика. М.: Наука, 1975.

[8] Ackermann W. Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre // Mathematische Annalen. 1937. Bd. 114. S. 305–315.

[9] Grzegorczyk A. Undecidability without arithmetization // Studia Logica. 2005. Vol. 79, No. 2. P. 163–233.

[10] Hájek P., Pudlák P. Metamathematics of First-Order Arithmetic. Berlin: Springer, 1993.

[11] Quine W. V. Concatenation as a basis for arithmetic // Journal of Symbolic Logic. 1946. Vol. 11, No. 4. P. 105–114.

[12] Simpson S. G. Subsystems of Second Order Arithmetic. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[13] Tait W. W. Finitism // Journal of Philosophy. 1981. Vol. 78, No. 9. P. 524–546.